

SÉRIE A, N° 3349

N° D'ORDRE :

4221

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JACQUES-MICHEL WINTER

- 1^{re} THÈSE.** — ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES TRANSITIONS A PLUSIEURS QUANTA ENTRE LES SOUS-NIVEAUX ZEEMAN D'UN ATOME.
- 2^e THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 mars 1958 devant la Commission d'examen.

MM. F. PERRIN.....	<i>Président.</i>
A. KASTLER.....	} <i>Examineurs.</i>
J. BROSEL.....	
A. ABRAGAM.....	

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1959

SÉRIE A, N° 3349

N° D'ORDRE :

4221

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JACQUES-MICHEL WINTER

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES TRANSITIONS A PLUSIEURS QUANTA ENTRE LES SOUS-NIVEAUX ZEEMAN D'UN ATOME.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 mars 1958 devant la Commission d'examen.

MM. F. PERRIN..... *Président.*

A. KASTLER.....

J. BROSEL.....

A. ABRAGAM.....

} *Examineurs.*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1959



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	GALLIEN	T	Embryologie.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale	EICHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.)
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P.C.B.)
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	THELLIER	T	Physique du Globe.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
JAUGIER	T	Physiologie générale.	GRIVET	T	Radioélectricité.
M. CURIE	T	Physique (S.P.C.N.).	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et	QUELET	T	Chimie organique.
J. BOURCART	T	Physique (S.P.C.N.).	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
PLANTEFOL	T	Géographie physique et	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
GRASSÉ	T	Géologie dynamique.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et
PLANTEFOL	T	Botanique.			Géologie appliquée.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	JUNG	T	Pétrographie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie	WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste.
WYART	T	Minéralogie.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
TEISSIER	T	Zoologie.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	M. PRUVOST	T	Géologie.
P. AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	AMIEL	T	Chimie générale (P.C.B.)
VONNIER	T	Physiologie des fonctions.	HOCART	T	Minéralogie.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	J.-P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
H. CARTAN	T	Mathématiques (P.C.B.).	MAY	T	Biologie animale (P.C.B.)
LAFFETTE	T	Chimie générale.	CHOQUET	T	Calcul diff. et intégral.
FAYARD	T	Mécanique générale.	FELDMANN	T	Biologie (P.C.B.).
COULOMB	T	Physique du Globe.	GUINIER	T	Physique génér. (P.C.B.)
M ^{lle} COUSIN	T	Biol. animale (S.P.C.N.).	JOST	T	Physiologie comparée.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	FORTET	T	Calcul des probabilités.
P. DRACH	T	Zoologie.	SCHWARTZ	T	Méthodes mathématiques de la Physique.
KASTLER	T	Physique.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
EPHROSSI	T	Génétique.	MALAVARD	T	Aviation.
WURMSER	T	Biol. physico-chimique.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.).	NORMANT	T	Chimie organ. (P.C.B.).
GAUTHIERET	T	Biologie végétale (P.C.B.)	BÉNARD	T	Chimie (P.C.B.).
LUCAS	T	Recherches physiques.	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
ARNULF	T	Optique appliquée.	GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.).
M. MORAND	T	Enseignement de Phys.	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
SOLEILLET	T	Physique.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
DANJON	T	Astronomie.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
LAFORTE	T	Physique générale et Radioactivité.	CHADEFAUD	T	Botanique.
JANET	T	Mécanique analytique et	DESTRIAU	T	Physique (M.P.C.).
PETIT	T	Mécanique céleste.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie générale.
		Biologie maritime.	SALEM	T	Mathématiques générales

PROFESSEURS (suite).

LÉLONG	T	Mathématiques générales.	LEDERER	T	Chimie biologique.
DEVILLERS		Anatomie et Histologie comparées.	M ^{me} DUBREIL	T	Mathématiques (E.N.S.)
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.	M ^{me} LÉLONG	T	Mathématiques (E.N.S.)
FRANÇON		Physique (S.P.C.N.).	COTTE	T	Physique (M.P.C.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	J.-E. DUBOIS	T	Chimie (S.P.C.N.).
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).	LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
PISOT	T	Calcul des probabilités.	MICHEL	T	Chimie (S.P.C.N.).
E. ROCH	T	Géologie.	OLMER	T	Énergétique générale.
SCHATZMANN		Astrophysique.	ROUAULT	T	Physique (Enseignem.).
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.	BARCHEWITZ		Chimie physique.
JOLIOT	T	Physique nucléaire et Radioactivité.	BROSSEL		Physique atomique.
LENNUIER		Physique (P.C.B.).	BUSER		Biologie animale (P.C.B.).
RIZET		Génétique.	CAMUS		Biologie végétale (P.C.B.).
M ^{me} TONNELAT		Théories physiques.	CASTAING		Physique générale.
DIXMIER		Mathématiques (M.P.C.).	CURIEN		Minéralogie et cristallog.
SOUCHAY		Chimie générale (P.C.B.).	MOYSE		Physiologie végétale.
AIGRAIN		Physique (P.C.B.).	NOIROT		Évolution des êtres organisés.
BRUSSET		Chimie minérale (P.C.B.).	PANNETIER		Chimie (P.C.B.).
M. LÉVY		Physique théorique.	POSSOMPÈS		Biologie animale (P.C.B.).
LENORMANT		Physiologie.	PULLMANN		Chimie théorique.
M ^{me} CHAIX		Chimie biologique.	TEILLAC		Physique nucléaire et Radioactivité.
M ^{me} HUREL-PY		Biologie végétale (P.C.B.).	TONNELAT		Biologie phys.-chimique.
PIAUX		Chimie (P.C.B.).	VILLE		Économétrie.
BRUN		Mécanique expérimentale des fluides.	WILLEMART		Chimie (P.C.B.).
			BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).

Secrétaire Général Ch. MONIER.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique de l'Ecole normale supérieure au cours des années 1954-1957.

Je remercie vivement MM. A. Kastler et J. Brossel qui ont constamment dirigé mes recherches et m'ont prodigué avec bienveillance de nombreux conseils.

Je remercie tous les chercheurs et techniciens du Laboratoire qui m'ont assuré d'excellentes conditions de travail, et plus spécialement M. J.-P. Barrat avec qui j'ai eu de très utiles discussions.

Je remercie M. Y. Rocard, Directeur du Laboratoire, de sa généreuse hospitalité et la Direction du Centre national de la Recherche scientifique de son aide financière.

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES TRANSITIONS A PLUSIEURS QUANTA ENTRE LES SOUS-NIVEAUX ZEEMAN D'UN ATOME ⁽¹⁾ ⁽²⁾

par JACQUES-MICHEL WINTER

CHAPITRE PREMIER

Introduction générale.

Depuis un certain nombre d'années, la spectroscopie des radiofréquences a pris un grand développement, en particulier en ce qui concerne les résonances magnétiques dans l'état fondamental des atomes. Ces résonances sont en général des transitions dipolaires magnétiques. Elles obéissent aux règles de sélection $\Delta J = \pm 1,0$, $\Delta m = \pm 1,0$, J étant le moment angulaire total de l'atome et m la projection de ce moment sur le champ magnétique statique. Des expériences plus récentes ont montré que l'on peut observer des résonances n'obéissant pas à la règle de sélection $\Delta m = \pm 1,0$ (1) (14) (25) (29) (32) (37).

Il nous a paru intéressant de faire une étude théorique et expérimentale du problème de la forme des raies de résonance, que ce soit les résonances habituelles $\Delta m = 1$, ou les résonances « multiples » $\Delta m > 1$.

Le premier travail que nous nous proposions était de reprendre l'étude théorique de l'influence d'une perturbation oscillante sur les sous-niveaux d'un état atomique. L'existence de résonances multiples nous montre que l'on ne peut se borner à un calcul de perturbation à l'ordre le plus bas si l'on veut calculer les probabilités de transition. Nous avons déjà traité ce problème dans le cas où le système comportait trois

(1) Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences physiques, et soutenue le 19 mars 1958 devant la Commission d'examen.

(2) Le texte intégral de cette thèse fait l'objet du microfilm n° 38809 au Centre de Documentation du C. N. R. S., 15, quai Anatole-France, Paris-7^e.

niveaux (7) (9). Un traitement plus général a été donné par H. Salwen (11) (On peut également citer le travail de Hark (24)). Nous avons repris la théorie en envisageant :

- 1° le cas où le champ oscillant est un champ tournant ;
- 2° le cas général ;
- 3° le cas où il y a deux champs de fréquences différentes ;

L'étude plus approfondie de cette question nous a permis de prévoir l'existence de résonances multiples pouvant exister pour un système atomique n'ayant que deux niveaux ($\Delta m = 1$) : plusieurs photons de radiofréquence peuvent être absorbés simultanément à condition de respecter la loi de conservation de l'énergie et celle de conservation du moment angulaire,

Pour observer une résonance, il est presque toujours nécessaire de produire une dissymétrie de population. Nous avons utilisé la méthode du pompage optique (3) (16) appliquée à l'atome de sodium.

Nous avons fait nos expériences sur une vapeur saturante en présence d'un gaz étranger (4) (6) (8) (17) (20) (22) (27) (Dans ces méthodes, la concentration des atomes est très faible, ceci nous permet de négliger leurs interactions mutuelles).

Nous serons amenés à étudier le temps moyen T pendant lequel l'atome est soumis au champ de radiofréquence, ainsi que la répartition des temps T . Plus T est long, plus les raies seront fines comme il résulte de la quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg. Notons également que plus T est long, plus il sera commode d'observer des transitions d'ordre élevé. Nous montrerons que la valeur maximum de la probabilité de transition peut s'écrire :

$$P \sim K_{ab} \bar{T} \text{ si } K_{ab} \bar{T} \ll 1.$$

K_{ab} est un terme assurant le couplage entre les niveaux résonnants (ce couplage peut se faire directement, ou bien par l'intermédiaire d'un ou plusieurs niveaux virtuels). K_{ab} est d'autant plus petit que la résonance est d'ordre plus élevé. Pour avoir un P observable, il faut donc avoir un grand $\bar{T}$.

Il nous restera ensuite à vérifier expérimentalement les calculs précédents.

Ce programme de travail fixe le plan du mémoire :

- 1° Etude de l'interaction entre le champ de radiofréquence et l'atome.
- 2° Calcul des formes de raies.
- 3° Montage expérimental.
- 4° Résultats des mesures.

CHAPITRE II

**Probabilités de transition
entre les sous-niveaux d'un atome
soumis à un champ oscillant.**

Introduction.

Depuis les expériences de Rabi et de ses collaborateurs, de nombreux physiciens ont abordé ce problème. En général, ils se sont bornés à envisager l'action d'un champ tournant. Rabi a étudié ce problème dans le cas particulier d'un système possédant un moment angulaire $J = \frac{1}{2}$ (38). Les calculs peuvent s'étendre au cas d'un spin J quelconque, en utilisant les formules démontrées par Majorana (11) (34). Ce problème a été repris plus récemment à l'occasion de la découverte de résonances d'ordre supérieur (1) (7) (9) (14) (29) (32) (37) (41) (24). Signalons que Bloch et Siegert ont étudié le problème pour un champ linéaire (12).

Action d'un champ tournant.

1° SYSTÈME CONSTITUÉ PAR UN MOMENT ANGULAIRE RIGIDE $\vec{J}$ PLACÉ DANS UN CHAMP STATIQUE H_0 (SUR Oz).

Le hamiltonien s'écrit :

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_0 = g_J \mu_0 H_0 J_z.$$

Ce qui donne les niveaux d'énergie équidistants :

$$(2.2) \quad E_m = m g_J \mu_0 H_0.$$

Nous ajouterons à H_0 un champ tournant à la vitesse angulaire ω , perpendiculaire à Oz et d'amplitude H_1 .

Le hamiltonien devient :

$$(2.3) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 = g_J \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{H} = \hbar \gamma_J \left(H_0 J_z + H_1 \cos \omega t J_x + H_1 \sin \omega t J_y \right)$$

expression dans laquelle :

$$\hbar \gamma_J = g_J \mu_0.$$

Posons :

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad J_- = J_+^*.$$

Nous écrirons par convention $\hbar = 1$ dans tous les calculs présentés dans ce mémoire.

L'équation (2.3) devient :

$$(2.4) \quad \mathcal{H} = \gamma_J \left\{ H_0 J_z + \frac{1}{2} J_+ H_1 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} J_- H_1 e^{i\omega t} \right\}$$

Soit $\Psi(t)$ la fonction d'onde du système et ψ_m la fonction d'onde stationnaire correspondant à l'énergie E_m .

Nous avons :

$$(2.5) \quad \Psi(t) = \sum_m a_m(t) \psi_m.$$

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$(2.6) \quad i \frac{da_m}{dt} = \sum_{m'} \langle m | \mathcal{H} | m' \rangle a_{m'}.$$

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} i \frac{da_m}{dt} &= m \gamma_J H_0 a_m + \frac{\gamma_J H_1}{2} \langle m | J_+ | m-1 \rangle a_{m-1} e^{-i\omega t} \\ &\quad + \frac{\gamma_J H_1}{2} \langle m | J_- | m+1 \rangle a_{m+1} e^{i\omega t}. \end{aligned} \right.$$

Étudions le cas $J = \frac{1}{2}$.

Nous voulons calculer la probabilité de transition entre les deux niveaux $m = -\frac{1}{2}$ et $m = \frac{1}{2}$.

Prenons comme conditions initiales pour $t = 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{\frac{1}{2}} &= 1 \\ a_{-\frac{1}{2}} &= 0. \end{aligned} \right.$$

On en déduit :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t\right) &= |a_{\frac{1}{2}}(t) a_{-\frac{1}{2}}^*(t)| \\ &= \frac{(\gamma_J H_1)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_J H_1)^2} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_J H_1)^2} \\ \omega_0 &= \gamma_J H_0. \end{aligned} \right.$$

Si $J > \frac{1}{2}$, la formule de Majorana permet de calculer $(11) P(J, m_J, m'_J, t)$ en fonction de $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t\right)$. $P(J, m_J, m'_J, t)$ désigne la probabilité de transition au temps t entre les sous-niveaux m_J et m'_J d'un moment angulaire J .

2° SYSTÈME CONSTITUÉ PAR DEUX MOMENTS ANGULAIRES I ET J COUPLÉS. —
a) *Généralités*. — Diagonalisons le hamiltonien en l'absence du champ tournant :

$$(2.9) \quad \mathcal{H}_0 = \gamma_j J_z H_0 + \gamma_i I_z H_0 + A \vec{I} \cdot \vec{J}$$

Posons :

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}.$$

Lorsque H_0 est nul, $|\vec{F}|^2$ et F_z définissent de bons nombres quantiques. Le système comporte un certain nombre de niveaux définis par F ($2F + 1$ fois dégénérés).

Si H_0 est faible, la dégénérescence des niveaux F est levée. A l'intérieur de chaque multiplicité F , on peut écrire :

$$(2.10) \quad \mathcal{H}_0 = g_F \mu_0 F_z H_0.$$

Le hamiltonien dû au champ oscillant vaut :

$$(2.11) \quad \mathcal{H}_1 = \frac{H_1}{2} e^{-i\omega t} (\gamma_j J_+ + \gamma_i I_+) + \frac{H_1}{2} (\gamma_j J_- + \gamma_i I_-) e^{i\omega t}.$$

Or dans une configuration possédant un moment angulaire rigide $\vec{F}$, tout vecteur est proportionnel à $\vec{F}$.

(2.11) peut alors s'écrire :

$$(2.12) \quad \mathcal{H}_1 = b \left\{ \frac{H_1}{2} e^{-i\omega t} F_+ + \frac{H_1}{2} e^{i\omega t} F_- \right\}$$

b étant une constante (à condition de ne considérer que les transitions $\Delta F = 0$).

Le problème se ramène au problème précédent.

Si dans $\mathcal{H}_0$ les deux premiers termes ne sont plus négligeables devant le troisième, il y a découplage partiel entre I et J ; F n'est plus un bon nombre quantique (m_F demeure un bon nombre quantique).

On peut continuer à désigner les niveaux par (F, m_F) par continuité (nous supprimerons l'indice F à m_F).

La diagonalisation de $\mathcal{H}_0$ nous conduit à un certain nombre de niveaux d'énergie $\omega(F, m)$ ($\hbar = 1$).

Posons $\Psi(t) = \sum_{F,m} a_{F,m}(t) \psi_{F,m}$, étant la fonction propre de $\mathcal{H}_0$ pour la valeur propre $\omega_{F,m}$.

Comme $\gamma_i \ll \gamma_j$ nous négligerons dans $\mathcal{H}_1$ les termes en I .

Les $a_{F,m}$ obéissent à l'équation d'évolution :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{aligned} i \frac{da_{F,m}}{dt} &= \omega_{F,m} a_{F,m} + \frac{\gamma H_1}{2} \sum_{F'} \langle F, m | J_+ | F', m-1 \rangle a_{F',m-1} e^{-i\omega t} \\ &+ \frac{\gamma H_1}{2} \sum_{F'} \langle F, m | J_- | F', m+1 \rangle a_{F',m+1} e^{i\omega t} \end{aligned} \right.$$

posons :

$$(2.14) \quad b_{F,m} = a_{F,m} e^{im\omega t}.$$

Ceci est équivalent à la transformation canonique :

$$(2.15) \quad \mathcal{H}' = e^{-i\omega F_z t} \mathcal{H} e^{i\omega F_z t} \quad (24) \quad (41)$$

qui revient à passer dans un nouveau système d'axes $Oxyz$ tournant autour de Oz à la vitesse angulaire ω .

Dans ce système d'axes, l'atome est soumis à l'action d'une perturbation statique (39).

Le système (2.13) devient :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{aligned} i \frac{db_{F,m}}{dt} &= (\omega_{F,m} - m\omega) b_{F,m} + \frac{\gamma H_1}{2} \sum_{F'} \langle F, m | J_+ | F', m-1 \rangle b_{F',m-1} \\ &+ \frac{\gamma H_1}{2} \sum_{F'} \langle F, m | J_- | F', m+1 \rangle b_{F',m+1}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on appelle $\mathcal{H}'_1$ le hamiltonien statique obtenu par la transformation (2.16) à partir de $\mathcal{H}'$, (2.16) peut s'écrire :

$$(2.17) \quad i \frac{db_{F,m}}{dt} = E_{F,m} b_{F,m} + \sum_{F',m'} \langle F, m | \mathcal{H}'_1 | F', m' \rangle b_{F',m'}.$$

$$(2.18) \quad E_{F,m} = \omega_{F,m} - m\omega.$$

On peut, pour résoudre ce système, chercher les valeurs propres du hamiltonien statique $\mathcal{H}'_1$.

En utilisant cette méthode, nous avons fait le calcul (7) (9) pour un système à trois niveaux; les résultats s'expriment à l'aide des fonctions symétriques des racines de l'équation séculaire. Les calculs montrent qu'en plus des résonances $\Delta m = 1$, il apparaît un maximum dans les probabilités de transition pour :

$$2\omega_d = \omega(m = +1) - \omega(m = -1)$$

ce qui correspond à une transition :

$$\Delta m = 2.$$

La largeur de cette résonance varie proportionnellement à H_1^2 alors

que les largeurs des résonances $\Delta m = 1$ varient proportionnellement à H_1 .

Le calcul précédent est difficilement généralisable. Revenons aux équations (2.17). Si nous supposons que les termes non diagonaux de $\mathcal{H}'$ (ils proviennent de $\mathcal{H}'_1$) sont petits devant les différences entre les termes diagonaux, les quantités $|b_{F,m}|^2$ varient peu au cours du temps.

Comme $|b_{F,m}|^2 = |a_{F,m}|^2$ les populations des niveaux atomiques subissent peu de modifications.

Il peut arriver que deux éléments diagonaux de $\mathcal{H}'$ soient voisins. D'importantes modifications dans les populations de ces deux niveaux apparaissent alors, nous disons qu'il y a résonance. Nous trouverons donc la position des résonances en égalant deux éléments diagonaux de $\mathcal{H}'$:

$$(2.19) \quad \omega_{F,m} - m\omega = \omega_{F',m'} - m'\omega.$$

Nous allons montrer que la diagonalisation de $\mathcal{H}'$ peut se ramener à la diagonalisation d'une matrice 2.2.

b) *Réduction de la matrice $\mathcal{H}'$.* — Les éléments diagonaux de $\mathcal{H}'$ sont des fonctions de ω . Pour une certaine valeur de ω , ω_r , deux termes diagonaux de $\mathcal{H}'$ sont égaux. Nous supposons qu'il y a seulement deux termes qui deviennent égaux (Ceci serait faux si les niveaux $\omega_{F,m}$ étaient équidistants).

Nous étudierons le système au voisinage du point de croisement des niveaux $E_{F,m}$ et $E_{F',m'}$.

Le problème que nous cherchons à résoudre est classique; nous cherchons à lever la dégénérescence des niveaux F , m et F' , m' , la perturbation ne levant pas la dégénérescence au 1^{er} ordre (42) (43).

Nous poserons deux hypothèses :

Hypothèse A. — Les termes de $\mathcal{H}'_1$ sont petits devant les distances :

$$E_{F'',m''} - E_{F,m} \quad \text{et} \quad E_{F'',m''} - E_{F',m'}$$

$F''m''$ étant un niveau quelconque.

Hypothèse B. — Nous nous bornerons à faire les calculs dans un intervalle de ω tel que :

$$|E_{F,m} - E_{F',m'}| \ll |E_{F,m} - E_{F'',m''}|.$$

La méthode employée est inspirée de celle employée par Heitler (*Quantum Theory of Radiations*, p. 145-146) (28).

Nous allons effectuer une transformation canonique S.

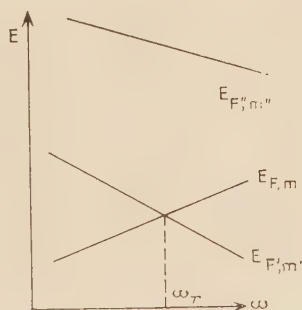


Fig. 1.

$\mathcal{H}'$ devient :

$$(2.20) \quad K = S^{-1} \mathcal{H}' S.$$

$\mathcal{H}'$, S et K sont indépendants du temps.

S sera défini en exigeant que les seuls éléments non diagonaux de K soient ceux reliant F, m et F', m' .

Pour simplifier la notation, désignons par i et j les états résonants. La définition de K ne détermine pas complètement S .

Nous supposons que S est unitaire :

$$(2.21) \quad SS^\dagger = 1.$$

Nous admettons que l'on peut développer K et S en puissance de γH_1 :

$$(2.22) \quad \begin{cases} S = 1 + S_1 + S_2 + \dots \\ K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots \end{cases}$$

En écrivant 1 comme terme d'ordre 0 pour S , nous supposons que ce sont les populations des états i et j qui ont un sens physique (et non les populations d'une combinaison linéaire de ces états).

S demeure encore indéterminé et nous pouvons poser en outre :

$$(2.23) \quad S_{ij} = S_{ji} = 0 \quad (28).$$

Nous allons maintenant résoudre le problème sans expliciter K et S . Prenons comme condition initiale :

$$t=0 \quad b_i = 1 \quad b_{p \neq i} = 0.$$

Nous cherchons $b_j(t)$.

$\Psi(t)$ peut se développer en fonction propre de $\mathcal{H}'_0$:

$$\Psi(t) = \sum_q b_q(t) \downarrow_q.$$

posons :

$$S^{-1} \Psi(t) = \sum_q b'_q(t) \downarrow_q.$$

On en déduit :

$$(2.24) \quad b'_p = \sum_q S_{pq}^{-1} b_q.$$

Les conditions initiales sur les b'_p deviennent :

$t=0, b'_p = S_{pi}^{-1}$; les b'_p obéissent aux équations d'évolution :

$$(2.25) \quad p \neq i, j \quad \left\{ \begin{array}{l} i \frac{db'_p}{dt} = \langle p | K | p \rangle b'_p \\ i \frac{db'_i}{dt} = \langle i | K | i \rangle b'_i + \langle i | K | j \rangle b'_j \\ i \frac{db'_j}{dt} = \langle j | K | j \rangle b'_j + \langle j | K | i \rangle b'_i. \end{array} \right.$$

On obtient la solution :

$$(2.26) \left\{ \begin{aligned} b'_p &= S_{pi}^{-1} e^{-iK_{pp}t} \\ b'_i &= e^{-\frac{it}{2}(K_{ii}+K_{jj})} \left[S_{ii}^{-1} \left(\cos \frac{at}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{at}{2} \right) + i S_{ji}^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{at}{2} \right] \\ b'_j &= e^{-\frac{it}{2}(K_{ii}+K_{jj})} \left[S_{ji}^{-1} \left(\cos \frac{at}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{at}{2} \right) + i S_{ii}^{-1} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{at}{2} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(2.27) \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= 2 \frac{K_{ij}}{a} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{K_{ii} - K_{jj}}{a} \\ a &= \sqrt{(K_{ii} - K_{jj})^2 + 4K_{ij}K_{ji}} \end{aligned} \right.$$

Nous négligerons dans S les termes du 2^e ordre.

Ceci est légitime car ces termes sont petits et varient peu autour de ω_r . Physiquement, ils proviennent de l'influence sur la résonance i, j de l'aile des autres résonances.

On obtient alors :

$$P(i \rightarrow j, t) = |b_j|^2.$$

$$(2.28) \left\{ \begin{aligned} P(i \rightarrow j, t) &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{at}{2} \\ &= \frac{4K_{ij}^2}{(K_{ii} - K_{jj})^2 + 4K_{ij}K_{ji}} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{(K_{ii} - K_{jj})^2 + 4K_{ij}^2} \end{aligned} \right.$$

Formule semblable à (2.9).

Cette probabilité de transition dépend des deux quantités $K_{ii} - K_{jj}$ et K_{ij} . La première est l'analogue de $(\omega - \omega_0)$ dans (2.9). Nous la calculerons en général jusqu'au 2^e ordre. Si nous choisissons ω en sorte que $K_{ii} = K_{jj}$ (2.28) devient :

$$(2.29) \quad P(i \rightarrow j) = \sin^2 \frac{t}{2} K_{ij}$$

aussi petit que soit K_{ij} en prenant t assez grand.

P peut être de l'ordre de l'unité.

Il est nécessaire de pousser le calcul de K_{ij} à un ordre suffisant pour que ce terme existe.

Ce terme détermine l'intensité et la largeur de la raie de résonance.

Montrons maintenant comment on calcule les éléments de la matrice K :

(2.20) s'écrit :

$$(2.30) \quad [I + S_1 + S_2 + \dots][K_0 + K_1 + \dots] = [\mathcal{E}'_0 + \mathcal{E}'_1][I + S_1 + S_2 + \dots]$$

en prenant les termes indépendants de γH_1 on obtient :

$$(2.31) \quad K_0 = \mathcal{E}'_0.$$

Les termes du 1^{er} ordre conduisent à l'équation :

$$(2.32) \quad K_1 = \mathcal{E}'_0 S_1 - S_1 \mathcal{E}'_0 + \mathcal{E}'_1.$$

En nous appuyant sur les définitions de K et de S on obtient :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \langle i | K_1 | i \rangle = \langle i | \mathcal{H}'_1 | i \rangle = 0 \\ \langle i | K_1 | j \rangle = (E_i - E_j) \langle i | S_1 | j \rangle + \langle i | \mathcal{H}'_1 | j \rangle = \langle i | \mathcal{H}'_1 | j \rangle. \end{cases}$$

S_1 est déterminé en écrivant :

$$\langle m | K_1 | p \rangle = 0.$$

A l'ordre suivant :

$$(2.34) \quad \begin{cases} K_2 = \mathcal{H}'_0 S_2 - S_2 \mathcal{H}'_0 - S_1 K_1 + \mathcal{H}'_1 S \\ \langle i | K_2 | i \rangle = \sum_{p \neq i, j} \langle i | \mathcal{H}'_1 | p \rangle \langle p | S_1 | i \rangle + \langle i | S_1 | p \rangle \langle p | K_1 | i \rangle \end{cases}$$

le deuxième terme est toujours nul d'après la définition de K (désormais nous noterons par Σ' les sommations excluant les états résonants) :

$$(2.35) \quad \langle i | K_2 | i \rangle = \sum_p' \frac{\langle i | \mathcal{H}'_1 | p \rangle \langle p | \mathcal{H}'_1 | i \rangle}{E_i - E_p}$$

et une formule analogue pour $\langle j | K_2 | j \rangle$.

La formule (2.35) ressemble à la formule classique des perturbations du second ordre, notons toutefois que le terme $p = j$ est exclu de la somme.

Calculons $\langle i | K_2 | j \rangle$ en utilisant (2.34), on obtient :

$$\langle i | K_2 | j \rangle = \sum_p' \frac{\langle i | \mathcal{H}'_1 | p \rangle \langle p | \mathcal{H}'_1 | j \rangle}{E_j - E_p}.$$

S_2 est déterminé par les équations (2.21) et (2.34).

Ensuite on peut calculer K_3 , ce calcul n'a vraiment d'intérêt que si $\langle i | K_1 | j \rangle = 0$. On obtient alors :

$$(2.37) \quad \begin{cases} \langle i | K_3 | j \rangle = \sum_{p, q}' \frac{\langle i | \mathcal{H}'_1 | p \rangle \langle p | \mathcal{H}'_1 | q \rangle \langle q | \mathcal{H}'_1 | j \rangle}{(E_i - E_p)(E_i - E_q)} \\ \langle i | K_3 | i \rangle = \langle j | K_3 | j \rangle = \langle p | K_3 | p \rangle = 0. \end{cases}$$

Ce dernier point résulte des propriétés de $\mathcal{H}'_1$; $\mathcal{H}'_1$ n'a d'éléments de matrice qu'entre des états pour lesquels $\Delta m = \pm 1$. Il faut donc un nombre pair de termes de la forme $\langle p | \mathcal{H}'_1 | q \rangle$ pour relier i à i et produire un Δm total nul. On peut affirmer que :

$$\langle q | K_{2p+1} | q \rangle = 0.$$

Nous savons que ces termes sont à l'origine des déplacements des résonances. Il est naturel qu'ils ne dépendent que des puissances paires

de H_1 , sinon le déplacement dépendrait du signe de H_1 ce qui est, physiquement, impossible.

Par approximations successives, on peut donc calculer complètement K .

Étudions le terme $K_{ii} - K_{jj}$.

Calculé à l'ordre 0 (2.34) ($i \rightarrow F, m; j \rightarrow F', m'$), il vaut :

$$(2.38) \quad (K_{ii} - K_{jj})_0 = \omega_{F,m} - \omega_{F',m'} - (m - m')\omega.$$

Ceci nous donne la position de la résonance à l'ordre 0.

Il est souvent nécessaire de calculer ce terme à l'ordre suivant :

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{aligned} (K_{ii})_2 = \sum_{F''} & \left\{ \frac{\langle F, m | \mathcal{H}_1' | F'', m+1 \rangle \langle m+1, F'' | \mathcal{H}_1' | F, m \rangle}{\omega_{F,m} - \omega_{F'',m+1} + \omega} \right. \\ & \left. + \frac{\langle F, m | \mathcal{H}_1' | F'', m-1 \rangle \langle m-1, F'' | \mathcal{H}_1' | F, m \rangle}{\omega_{F,m} - \omega_{F'',m-1} - \omega} \right\} \end{aligned} \right.$$

et une formule analogue pour $(K_{jj})_2$.

Nous poserons :

$$(2.40) \quad (K_{ii})_2 - (K_{jj})_2 = \delta_{ij}.$$

Ces termes sont généralement faibles; ils ont été observés sur une raie $\Delta m = 1$ pour $\omega = 14$ MHz; ils sont à la limite des erreurs expérimentales. Blamont a observé un déplacement de ce type sur le niveau excité 6^3P_1 du mercure (2).

Calculons maintenant K_{ij} .

Montrons qu'il est nécessaire de pousser le calcul jusqu'à l'ordre $m - m' + 1$.

Les formules du type (2.37) montrent que K_{ij} est un produit de termes de la forme $\langle p | \mathcal{H}_1' | q \rangle$; le premier terme part du niveau $i = F, m$ et le dernier arrive au niveau $j = F', m'$. Posons : $m' = m + p$.

$\mathcal{H}_1'$ n'a d'éléments de matrice qu'entre des états pour lesquels $\Delta m = \pm 1$.

Il y a donc au moins p termes dans K_{ij} pour passer de F, m à $F', m + p$.

Physiquement ceci veut dire que pour augmenter m de p unités nous devons utiliser p photons de radio-fréquence, chacun augmentant m d'une unité.

$$(2.41) \quad \left\{ \begin{aligned} & \langle F, m | K_{ij} | F', m + p \rangle = \sum_{F''} \langle F, m | \mathcal{H}_1' | F'', m+1 \rangle \\ & \langle m+1, F'' | \mathcal{H}_1' | F'', m+2 \rangle \dots \langle m+p-1, F'' | \mathcal{H}_1' | m+p \rangle \\ & \times \frac{1}{(E_{F',m'} - E_{F'',m+1}) \dots (E_{F',m'} - E_{m+p-1})} \end{aligned} \right.$$

Ce terme est proportionnel à H_1^p .

On obtient donc finalement :

$$(2.42) \left\{ \begin{aligned} & P(F, m; F' m', t) \\ &= \frac{4 | \langle F, m | K m' - m | F' m' \rangle |^2}{(\omega_{F, m} - \omega_{F' m'} - \omega_{m' - m'} + \delta_{F m, F' m'})^2 + 4 | \langle F, m | K m' - m | F' m' \rangle |^2} \\ & \times \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{[\omega_{F, m} - \omega_{F' m'} - \omega_{m' - m'} + \delta_{F m, F' m'}]^2} \\ & + 4 | \langle F, m | K m' - m | F' m' \rangle |^2. \end{aligned} \right.$$

La formule (2.41) nous montre que les transitions avec $\Delta F \neq 0$ seront beaucoup moins intenses que les transitions $\Delta F = 0$. En effet pour une transition $\Delta F = 0$, il y a dans (2.41) un terme où l'on a choisi tous les états intermédiaires dans les sous-niveaux ayant le même F . Les dénominateurs sont alors de l'ordre de grandeur de $(\omega_1 - \omega_2)$, ω_1 et ω_2 étant la position de deux résonances $\Delta m = 1$. $\Delta F = 0$.

Ce terme est de l'ordre de $\frac{(\gamma H_1)^p}{(\omega_1 - \omega_2)^{p-1}}$.

Si $\Delta F \neq 0$ au moins un des termes $\langle p | \mathcal{H}'_1 | q \rangle$ relie des états de F différents. (2.41) est alors de l'ordre de $\frac{(\gamma H_1)^p}{(\Delta W)^{p-1}}$, ΔW étant de l'ordre de grandeur de la structure hyperfine.

Dans toutes nos expériences, le découplage est faible $\omega_0 \ll \Delta W$ et l'intensité des raies $\Delta F \neq 0$ est plus faible. Cette remarque ne s'applique pas aux résonances simples $\Delta F \neq 0$; K_{ij} est de l'ordre de γH_1 . Nous n'avons observé que les résonances $\Delta F = 0$.

Nous dirons qu'une résonance est d'ordre p si le premier terme non nul de K_{ij} est d'ordre p .

Une résonance $\Delta m = p$ est d'ordre p en champ tournant.

c) *Cas d'un découplage faible.* — Nous supposons que les distances entre les sous-niveaux d'un même état F sont très petites devant les distances entre des niveaux de F différents. Nous étudierons les résonances $\Delta F = 0$. Nous négligerons dans les formules (2.41) et (2.35) tous les termes dont les dénominateurs sont de la forme $E_{F'} - E_F$, $F' \neq F$.

Dans ces conditions, il est possible d'étudier séparément chaque état F . Dans ce cas, les formules (2.35) et (2.41) se transposent dans les formules ci-après :

(2.35) devient :

$$(2.43) \left\{ \begin{aligned} & (K_{mm} - K_{m'm'})_{0+2} = \omega_m - \omega_{m'} - (m - m')\omega \\ & + \frac{(\mathcal{H}'_{m, m+1})^2}{\omega_m - \omega_{m+1} + \omega} + \frac{(\mathcal{H}'_{m, m-1})^2}{\omega_m - \omega_{m-1} + \omega} - \frac{(\mathcal{H}'_{m', m'+1})^2}{(\omega_{m'} - \omega_{m'+1} - \omega)} - \frac{(\mathcal{H}'_{m', m'-1})^2}{(\omega_{m'} - \omega_{m'-1} + \omega)} \end{aligned} \right.$$

équation qui détermine la position des résonances.

Enfin (2.41) devient :

$$(2.44) \left\{ \begin{aligned} & \langle m' | K | m \rangle_{m'-m} \\ &= \frac{\mathcal{H}'_{m, m+1} \mathcal{H}'_{m+1, m+2} \dots \mathcal{H}'_{m'-1, m'}}{(\omega_m - \omega_{m+1} + \omega)(\omega_m - \omega_{m+2} + 2\omega) \dots (\omega_m - \omega_{m'-1} + (m' - m - 1)\omega)} \end{aligned} \right.$$

En résumé, moyennant des hypothèses que nous allons à nouveau préciser, nous avons ramené le problème à un problème à *deux niveaux*, déterminé par la connaissance de K_{ij} et $K_{ii} - K_{jj}$.

Précisons les hypothèses :

Hypothèse A :

$$\gamma_J H_1 \ll |\omega_{m''} - \omega_{m'} - (m'' - m')\omega|.$$

Or :

$$(2.45) \quad \gamma_J H_1 \ll \frac{1}{(m'' - m')} \left| \left(\frac{\omega_{m''} - \omega_{m'}}{m'' - m'} - \frac{\omega_{m'} - \omega_m}{m' - m} \right) \right|.$$

Les deux termes sont deux fréquences de résonances ω_1 et ω_2 (équation (2.19)). La condition A se ramène donc à :

$$(2.46) \quad \gamma_J H_1 \ll |\omega_1 - \omega_2|.$$

Physiquement cela revient à dire que les résonances $\Delta m = 1$ doivent être bien séparées ($\gamma_J H_1$, en effet, est une mesure de l'élargissement des résonances simples).

La condition de découplage faible (que nous désignerons par condition C) s'écrit :

$$(2.47) \quad \gamma_F H_0 \ll \Delta W.$$

La condition B devient :

$$(2.48) \quad |\omega_m - \omega_{m'} - (m - m')\omega| \ll |\omega_{m''} - \omega_{m'} - (m'' - m')\omega|$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$|\omega_1 - \omega| \ll |\omega_2 - \omega|,$$

ω_1 étant la fréquence de la résonance étudiée et ω_2 la fréquence d'une autre résonance.

Enfin, demandons-nous dans quel cas on peut supposer le découplage complètement nul et appliquer les formules de Majorana.

Pour cela, il faut que la perturbation mélange tous les niveaux m à la fois, il faut donc que cette perturbation soit grande devant les distances entre les résonances :

$$(2.49) \quad \gamma H_1 \gg |\omega_1 - \omega_2|.$$

d) *Application au cas du sodium.* — Nous avons $I = \frac{3}{2}$, $J = \frac{1}{2}$ ce qui nous donne deux niveaux $F = 2$, $F = 1$.

Les énergies sont données par la formule de Breit-Rabi (13) :

$$(2.50) \quad W_{F,m} = -\frac{\Delta W}{2(2I+1)} + g_I m \mu_0 H_0 \pm \frac{\Delta W}{2} \sqrt{1 + \frac{4m}{2I+1} x + x^2}.$$

On prend le signe + pour les sous-niveaux $F = 2$ et le signe — pour les sous-niveaux $F = 1$:

$$x = (g_J - g_I) \frac{\nu_0}{\Delta W} H_0 \quad g_I \ll g_J.$$

ΔW est l'écart d'énergie entre les niveaux $F = 2$ et $F = 1$ en champ nul.

Dans le cas du découplage faible $x \ll 1$, nous allons développer (2.50) jusqu'au terme en x^2 .

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{22} = \frac{3\Delta W}{8} + \frac{\Delta W}{2} x + 2x, \\ W_{21} = \frac{3\Delta W}{8} + \frac{\Delta W}{4} x + \frac{3}{16} \Delta W x^2 + x, \\ W_{20} = \frac{3\Delta W}{8} + \frac{\Delta W}{4} x^2, \\ W_{2,-1} = \frac{3\Delta W}{8} - \frac{\Delta W}{4} x + \frac{3}{16} \Delta W x^2 - x, \\ W_{2,-2} = \frac{3\Delta W}{8} - \frac{\Delta W}{2} x - 2x, \\ W_{1,1} = -\frac{5}{8} \Delta W - \frac{\Delta W}{4} x - \frac{3}{16} \Delta W x^2 + x, \\ W_{1,0} = -\frac{5}{8} \Delta W - \frac{1}{4} \Delta W x^2, \\ W_{1,-1} = -\frac{5}{8} \Delta W + \frac{\Delta W}{4} x - \frac{3}{16} \Delta W x^2 - x, \\ x = g_I \nu_0 H_0 \ll \frac{\Delta W}{4} x \ll \Delta W. \end{array} \right.$$

Posons :

$$(2.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{\Delta W}{4} x = \frac{1}{4} (g_J - g_I) \nu_0 H_0 \approx \nu_I H_0, \\ \varepsilon = \frac{\Delta W}{16} x^2. \end{array} \right.$$

Calculons la position des résonances :

Résonances : $\Delta m = 1$:

$$(2.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = 2 \\ F = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ll} 2 \rightarrow 1 & \omega = \omega_0 + \alpha - 3\varepsilon, \\ 1 \rightarrow 0 & \omega = \omega_0 + \alpha - \varepsilon, \\ 0 \rightarrow -1 & \omega = \omega_0 + \alpha + \varepsilon, \\ -1 \rightarrow -2 & \omega = \omega_0 + \alpha + 3\varepsilon, \\ 1 \rightarrow 0 & \omega = \omega_0 - \alpha - \varepsilon, \\ 0 \rightarrow -1 & \omega = \omega_0 - \alpha + \varepsilon. \end{array} \right.$$

Résonances : $\Delta m = 2$:

$$(2.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} F=2 \\ F=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow -1 \\ 0 \rightarrow -2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha - 2\varepsilon, \\ \omega = \omega_0 + \alpha, \\ \omega = \omega_0 + \alpha + 2\varepsilon. \end{array} \\ 1 \rightarrow -1 \quad \omega = \omega_0 - \alpha. \end{array}$$

Résonances : $\Delta m = 3$:

$$(2.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow -1 \\ 1 \rightarrow -2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha - \varepsilon, \\ \omega = \omega_0 + \alpha + \varepsilon. \end{array}$$

Résonances : $\Delta m = 4$:

$$(2.56) \quad 2 \rightarrow -2 \quad \omega = \omega_0 + \alpha.$$

Comme nous traitons séparément les cas $F=2$ et $F=1$, nous incorporerons α dans la valeur de ω_0 , en nous souvenant qu'il faut ajouter α à ω_0 pour $F=2$ et le retrancher pour $F=1$.

Nous allons déterminer les corrections à la position des résonances et leur intensité. Calculons $\langle m, F | \mathcal{H}'_1 | m-1, F \rangle$ (nous supprimerons l'indice F) :

$$(2.57) \quad \langle m | \mathcal{H}'_1 | m-1 \rangle = \frac{\gamma_2 H_1}{2} \langle m | J_+ | m-1 \rangle.$$

Si le découplage est nul :

$$(2.58) \quad \vec{J} = a\vec{F} \quad (a \text{ une constante}).$$

Le découplage n'étant plus nul, on doit ajouter des termes correctifs à cette formule. Le calcul montre que ces termes sont de l'ordre de α^2 . Comme nous considérons $\mathcal{H}'_1$ comme une perturbation, nous n'effectuerons pas cette correction.

Pour calculer a on regarde ce que devient la relation (2.58) pour un niveau particulier et pour une composante des vecteurs.

On obtient pour les niveaux $F=2$, $a = \frac{1}{4}$; pour les niveaux $F=1$, $a = -\frac{1}{4}$. Posons :

$$(2.59) \quad K_{\pm} = \frac{a\gamma_2 H_1}{2}.$$

Nous avons :

$$(2.60) \quad \langle m | \mathcal{H}'_1 | m-1 \rangle = K_{+} \sqrt{(F-m+1)(F+m)}.$$

On obtient pour les termes non diagonaux de $\mathcal{H}'_1$:

$$(2.61) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F=2 & F=1 \\ \begin{array}{l} \langle 2 | \mathcal{H}'_1 | 1 \rangle = 2K_+ \\ \langle 1 | \mathcal{H}'_1 | 0 \rangle = \sqrt{6}K_+ \\ \langle 0 | \mathcal{H}'_1 | -1 \rangle = \sqrt{6}K_+ \\ \langle -1 | \mathcal{H}'_1 | -2 \rangle = 2K_+ \end{array} & \begin{array}{l} \langle 1 | \mathcal{H}'_1 | 0 \rangle = -\sqrt{2}K_+ \\ \langle 0 | \mathcal{H}'_1 | -1 \rangle = -\sqrt{2}K_+ \end{array} \end{array} \right.$$

Nous allons calculer les valeurs de $K_{ii} - K_{jj}$ au deuxième ordre en γH_1 et K_{ij} à l'ordre le plus bas possible.

Par exemple, pour la raie $2 \rightarrow 1$, $\omega = \omega_0 - 3\varepsilon$:

$$\begin{aligned} K_0 &= \mathcal{H}'_0 & \langle 2 | K_1 | 1 \rangle &= 2K_+ \\ \langle 2 | K_2 | 2 \rangle &= \sum_{m \neq 1} \frac{\langle 2 | \mathcal{H}'_1 | m \rangle \langle m | \mathcal{H}'_1 | 2 \rangle}{E_m - E_2} = 0 \\ \langle 1 | K_2 | 1 \rangle &= \frac{\langle 1 | \mathcal{H}'_1 | 0 \rangle \langle 0 | \mathcal{H}'_1 | 1 \rangle}{E_1 - F_0} = \frac{3K_+^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

En employant les formules (2.43).

Nous pouvons dresser le tableau des positions des raies simples et des termes non diagonaux de K :

$$(2.62) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Positions } F=2 & K_{ij} \\ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 1 \quad \omega = \omega_0 - 3\varepsilon - \frac{3K_+^2}{\varepsilon} \\ 1 \rightarrow 0 \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon - \frac{K_+^2}{\varepsilon} \\ 0 \rightarrow -1 \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon + \frac{K_+^2}{\varepsilon} \\ -1 \rightarrow -2 \quad \omega = \omega_0 + 3\varepsilon + \frac{3K_+^2}{\varepsilon} \end{array} & \begin{array}{l} 2K_+ \\ \sqrt{6}K_+ \\ \sqrt{6}K_+ \\ 2K_+ \end{array} \end{array} \right.$$

$$(2.63) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Positions } F=1 & \\ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 0 \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon - \frac{K_+^2}{\varepsilon} \\ 0 \rightarrow -1 \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon + \frac{K_+^2}{\varepsilon} \end{array} & \begin{array}{l} -\sqrt{2}K_+ \\ -\sqrt{2}K_+ \end{array} \end{array} \right.$$

Nous avons limité le calcul des éléments non diagonaux à l'ordre 1 (l'ordre suivant est l'ordre 3).

Passons maintenant aux raies multiples, nous appliquerons les formules (2.43) (2.44),

Il est remarquable que nous ne trouvons pas de déplacement pour les raies multiples (au deuxième ordre en γH_1 et en négligeant les termes en x^3).

Nous obtenons le tableau :

$$(2.64) \quad \left\{ \begin{array}{llll} & 2 \rightarrow 0 & 2\omega = 2\omega_0 - 4\varepsilon & \frac{K_{ij}}{\varepsilon} K_+^2 \\ F=2 & 1 \rightarrow -1 & 2\omega = 2\omega_0 & \frac{6K_+^2}{\varepsilon} \\ & 0 \rightarrow -2 & 2\omega = 2\omega_0 + 4\varepsilon & \frac{2\sqrt{6}}{\varepsilon} K_+^2 \\ F=1 & 1 \rightarrow -1 & 2\omega = 2\omega_0 & \frac{2K_+^2}{\varepsilon} \\ & 2 \rightarrow -1 & 3\omega = 3\omega_0 - 3\varepsilon & \frac{3K_+^3}{\varepsilon^2} \\ & 1 \rightarrow -2 & 3\omega = 3\omega_0 + 3\varepsilon & 3 \frac{K_+^3}{\varepsilon^2} \\ & 2 \rightarrow -2 & 4\omega = 4\omega_0 & \frac{2}{3} \frac{K_+^4}{\varepsilon^3} \end{array} \right.$$

A l'aide de ce tableau et de la formule (2.42), on peut calculer toutes les probabilités de transition.

Notons enfin que les conditions (2.46) et (2.49) deviennent respectivement :

$$(2.65) \quad K_+ \ll \varepsilon \quad (2.66) \quad K_+ \gg \varepsilon.$$

Action d'un champ de polarisation quelconque.

1° INTRODUCTION (44) (45). — Ce problème a été relativement peu étudié. Bloch et Siegert (12) ont montré qu'un champ linéaire déplace très légèrement la fréquence de résonance. Autler et Townes ont démontré et complété la formule de Bloch et Siegert (2). N. F. Ramsey a envisagé l'action de deux champs de fréquences différentes (40).

Aucun de ces auteurs n'a mis clairement en évidence l'apparition d'un nouveau type de résonances multiples qui apparaissent quand le champ H_1 de radiofréquence n'est pas un champ tournant. Signalons toutefois que Hugues et Grabner ont observé des résonances pour $2\omega = E_n - E_m$ et pour $\omega + \omega' = E_n - E_m$ (ω, ω' fréquence de deux champs électriques oscillants) en étudiant des transitions dipolaires électriques (23) (30).

2° SPIN RIGIDE $\vec{J} = \frac{1}{2} \vec{I} = 0$. — a) *Hamiltonien du système*. — Le champ H_1 peut toujours s'écrire après un choix convenable des axes O_x et O_y :

$$(2.67) \quad \vec{H}_1 = H_x \cos \omega t \vec{i} + H_y \sin \omega t \vec{j} + H_z \cos(\omega t + \psi) \vec{k}.$$

Nous en déduisons :

$$(2.68) \quad \mathcal{H}_1 = \vec{\gamma}_j \vec{J} \cdot \vec{H} = \gamma_j J_x H_x \cos \omega t + \gamma_j J_y H_y \sin \omega t + \gamma_j J_z H_z \cos (\omega t + \psi)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$(2.69) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \gamma_j J_z H_0 \cos (\omega t + \psi) \\ &+ \frac{\gamma_j J_+}{4} (H_y + H_x) e^{-i\omega t} + \frac{\gamma_j J_-}{4} (H_x - H_y) e^{+i\omega t} \\ &+ \frac{\gamma_j J_-}{4} (H_x + H_y) e^{+i\omega t} + \frac{\gamma_j J_+}{4} (H_x - H_y) e^{-i\omega t} \end{aligned} \right.$$

Nous résoudrons le problème pour $J = \frac{1}{2}$.

Nous poserons :

$$(2.70) \quad \Psi = a_{\frac{1}{2}}(t) \psi_{\frac{1}{2}} + a_{-\frac{1}{2}}(t) \psi_{-\frac{1}{2}}$$

et nous obtenons :

$$(2.71) \quad \left\{ \begin{aligned} i \frac{da_{\frac{1}{2}}}{dt} &= \left(\frac{\omega_0}{2} + K_+ e^{i\omega t} + K_-^* e^{-i\omega t} \right) a_{\frac{1}{2}} + a_{-\frac{1}{2}} (K_+ e^{-i\omega t} + K_- e^{+i\omega t}) \\ i \frac{da_{-\frac{1}{2}}}{dt} &= - \left(\frac{\omega_0}{2} + K_- e^{i\omega t} + K_+^* e^{-i\omega t} \right) a_{-\frac{1}{2}} + a_{\frac{1}{2}} (K_- e^{+i\omega t} + K_+ e^{-i\omega t}) \end{aligned} \right.$$

en posant :

$$(2.72) \quad \left\{ \begin{aligned} K_+ &= \frac{\gamma_j}{4} (H_x + H_y) < \frac{1}{2} | J_+ | - \frac{1}{2} > \\ K_- &= \frac{\gamma_j}{4} (H_x - H_y) < \frac{1}{2} | J_+ | - \frac{1}{2} > \\ K_\pi &= \frac{\gamma_j}{4} H_z e^{i\psi} \quad \omega_0 = \gamma_j H_0 \end{aligned} \right.$$

K_+ et K_- sont proportionnels aux amplitudes des champs tournants droits et gauches.

b) Le champ est perpendiculaire à O_z .

$$(2.73) \quad \left\{ \begin{aligned} i \frac{da_{\frac{1}{2}}}{dt} &= \frac{\omega_0}{2} a_{\frac{1}{2}} + a_{-\frac{1}{2}} \{ K_+ e^{-i\omega t} + K_- e^{+i\omega t} \} \\ i \frac{da_{-\frac{1}{2}}}{dt} &= - \frac{\omega_0}{2} a_{-\frac{1}{2}} + a_{\frac{1}{2}} \{ K_+ e^{+i\omega t} + K_- e^{-i\omega t} \} \end{aligned} \right.$$

Pour résoudre (2.73) nous allons remplacer $a_{\frac{1}{2}}$ et $a_{-\frac{1}{2}}$ par un développement :

$$(2.74) \quad a_{-\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{-\frac{1}{2}}^{(2n)} \quad a_{\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)}.$$

Nous allons choisir le système d'équations pour les $a_{-\frac{1}{2}}^{(2n)}$ et $a_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)}$ de

façon qu'un $a_{-\frac{1}{2}}^{(2n)}$ ne soit couplé à un $a_{\frac{1}{2}}^{(2n'+1)}$ que par un seul terme exponentiel. La solution de ce nouveau système devra être telle que si l'on affecte les sommations sur n , on trouve des quantités satisfaisant à (2.73) :

$$(2.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} i \frac{da_{-\frac{1}{2}}^{(2n)}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} a_{-\frac{1}{2}}^{(2n)} + K_+ a_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)} e^{+i\omega t} + K_- a_{\frac{1}{2}}^{(2n-1)} e^{-i\omega t} \\ \dots \\ i \frac{da_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)}}{dt} = \frac{\omega_0}{2} a_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)} + K_+ a_{-\frac{1}{2}}^{(2n)} e^{-i\omega t} + K_- a_{-\frac{1}{2}}^{(2n+2)} e^{+i\omega t} \end{array} \right.$$

On peut maintenant éliminer les exponentielles en posant :

$$(2.76) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{-\frac{1}{2}}^{2n} = e^{2i\omega t} a_{-\frac{1}{2}}^{2n} \\ b_{\frac{1}{2}}^{2n+1} = e^{i(2n+1)\omega t} a_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)} \end{array} \right.$$

On obtient :

$$(2.77) \quad \left\{ \begin{array}{l} i \frac{db_{-\frac{1}{2}}^{(2n)}}{dt} = \left(-\frac{\omega_0}{2} - 2n\omega \right) b_{-\frac{1}{2}}^{(2n)} + K_+ b_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)} + K_- b_{\frac{1}{2}}^{(2n-1)} \\ \dots \\ i \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)}}{dt} = \left(\frac{\omega_0}{2} - (2n+1)\omega \right) b_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)} + K_+ b_{-\frac{1}{2}}^{(2n)} + K_- b_{-\frac{1}{2}}^{(2n+2)} \end{array} \right.$$

Ce système est maintenant semblable à (2.17).

(2.77) est l'équation d'évolution relative à l'atome et au champ de radiofréquence. Les termes diagonaux $\mathcal{H}_0$ donnent les énergies des deux systèmes, les termes non diagonaux $\mathcal{H}_1$ décrivent leurs interactions. L'indice n définit le nombre de photons absorbés par le système total à partir de l'état $n=0$. Le système (2.77) peut être obtenu en quantifiant le champ de radiofréquence.

Dans le chapitre précédent, il n'y avait qu'un seul type de photons (que nous pouvons appeler σ_+). A chaque photon absorbé, le système atomique subissait une transition $\Delta m = 1$. L'ensemble des niveaux était entièrement déterminé par m .

Ici il y a deux types de photons (σ_+ et σ_-) :

les uns K_+ induisent les transitions :

$$\text{absorption d'un photon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta m = +1 \\ \Delta n = +1 \end{array} \right. \quad \text{émission} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta m = -1 \\ \Delta n = -1 \end{array} \right.$$

les autres K_- induisent :

$$\text{émission} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta m = +1 \\ \Delta n = -1 \end{array} \right. \quad \text{absorption} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta m = -1 \\ \Delta n = +1 \end{array} \right.$$

Une représentation graphique simple consiste à placer dans une

même colonne les éléments de même n et sur une même ligne ceux de même m .

Les termes K_+ donnent des flèches montant de gauche à droite, les termes K_- des flèches de droite à gauche.

Sans résoudre, nous pouvons prévoir la position des résonances, en

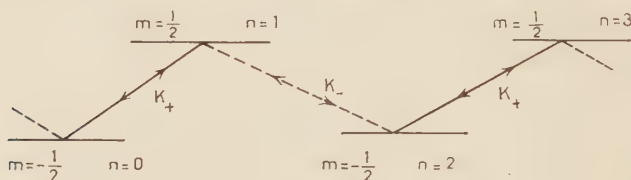


Fig. 2.

utilisant le raisonnement que nous avons fait dans le cas d'un champ tournant. Il y a résonance quand deux termes diagonaux de $\mathcal{H}'$ deviennent égaux :

$$-\frac{\omega_0}{2} - 2n\omega = \frac{\omega_0}{2} - (2n' + 1)\omega.$$

(2.78)

$$\omega_0 = (2p + 1)\omega.$$

(p entier)

En plus de la résonance $\omega = \omega_0$ il apparaît un spectre de résonances pour les harmoniques impairs de ω .

Nous pouvons comprendre l'existence de ces résonances en nous basant sur les lois de conservation de l'énergie et de la composante suivant O_z du moment angulaire total du système.

Par exemple dans la transition $\omega_0 = 3\omega$ un premier photon K_+ amène une énergie valant ω et augmente m d'une unité ; un photon K_- amène

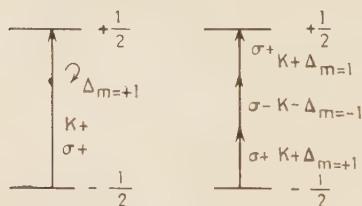


Fig. 3.

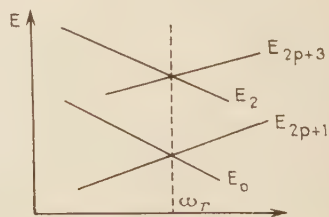


Fig. 4.

la même énergie mais diminue d'une unité m . On réalise le bilan en faisant intervenir un deuxième photon K_+ .

c) *Solution de (2.77).* — Nous utiliserons une méthode semblable à celle employée pour résoudre (2.17).

Il y a ici une différence entre les systèmes (2.77) et (2.17). Quand deux éléments diagonaux de $\mathcal{H}'$ (2.77) deviennent égaux, tous les autres éléments diagonaux le sont deux à deux.

Par exemple si $E_0 = E_{2p+1}$ (nous pouvons supprimer les indices $\pm \frac{1}{2}$, la parité de n distingue les deux états) :

$$-\frac{\omega_0}{2} = \frac{\omega_0}{2} - (2p+1)\omega.$$

On vérifie que :

$$E_2 = E_{2p+3} \quad E_4 = E_{2p+5}.$$

Seules les variations de n ont un sens physique.

Nous allons effectuer une transformation canonique S transformant $\mathcal{H}'$ en un hamiltonien K dont les seuls éléments non diagonaux sont ceux qui relient les états d'énergie voisine.

Nous supposons, comme nous l'avons fait précédemment :

$$D) K_+, K_- \ll |E_0 - E_n|$$

E_0 et E_n n'étant pas les états résonnants.

Ceci est certainement satisfait si on a :

$$(2.79) \quad K_+, K_- \ll \omega, \omega_0.$$

$$(2.80) \quad E) |E_0 - E_{2p+1}| \ll |E_0 - E_2|, |E_0 - E_4| \dots$$

Si on pose :

$$\omega = \frac{\omega_0}{2p+1} \pm \Delta\omega.$$

E) est satisfait en supposant :

$$(2.81) \quad \Delta\omega \ll \omega, \omega_0.$$

Nous supposons enfin que les éléments de S liant les états d'énergie voisine sont nuls au premier ordre par rapport à la perturbation.

K se présente sous la forme :

$\begin{matrix} K_{-2,-2} & K_{-2,2p-1} \\ K_{2p-1,-2} & K_{2p-1,2p-1} \end{matrix}$	0	
0	$\begin{matrix} K_{00} & K_{0,2p+1} \\ K_{2p+1,0} & K_{2p+1,2p+1} \end{matrix}$	0
	0	$\begin{matrix} K_{22} & K_{2,2p+3} \\ K_{2p+3,2} & K_{2p+3,2p+3} \end{matrix}$

Le problème est donc ramené à un problème à deux niveaux.

Etudions la transition :

$$\omega \sim \omega_0 \quad E_{2n} = E_{2n+1}.$$

Nous calculons K comme précédemment :

$$\begin{aligned} K_0 &= \mathcal{H}'_0 \\ \langle 0 | K_1 | 1 \rangle &= K_+ \\ \langle 2 | K_1 | 3 \rangle &= K_+ \end{aligned}$$

d'après la formule (2.33).

Pour les éléments non diagonaux, nous nous limiterons à ce terme. Calculons la partie diagonale de K_2 :

$$\begin{aligned} \langle 0 | K_2 | 0 \rangle &= \frac{\langle 0 | \mathcal{H}'_1 | -1 \rangle \langle -1 | \mathcal{H}'_1 | 0 \rangle}{E_0 - E_{-1}} = - \frac{K_-^2}{\omega + \omega_0} \\ \langle 1 | K_2 | 1 \rangle &= \frac{K_-^2}{\omega + \omega_0} \end{aligned}$$

(voir formule (2.35)).

La position de la résonance calculée au 2^e ordre sera donc :

$$(2.82) \quad \omega_0 = \omega + \frac{2K_-^2}{\omega + \omega_0} \simeq \omega + \frac{K_-^2}{\omega}.$$

Remarque. — D'après l'équation (2.68) au temps $t=0$ $\vec{H}_1 = H_1 \vec{i}$.

Ce choix est arbitraire, certains atomes sont plongés au temps $t=0$ dans un champ d'amplitude H_x , mais d'autres seront plongés dans des champs dont l'amplitude est intermédiaire entre H_x et H_y . Il faut faire une moyenne sur les probabilités de transition obtenues compte tenu de ces différentes possibilités.

Nous tiendrons compte de cet effet en remplaçant K_- réel par $K_- e^{i\varphi}$ et en effectuant une moyenne sur toutes les valeurs de φ . Ce déphasage a deux effets :

- 1) Il fait tourner dans le plan xoy l'ellipse décrite par le champ (ceci ne change rien au problème).
- 2) Il change l'amplitude du champ au temps $t=0$.

En effectuant une moyenne sur les différentes valeurs de φ nous faisons une moyenne sur les différentes valeurs du champ au temps $t=0$.

Calcul de la probabilité de transition. — Nous étudierons la transition :

$$\omega_0 \sim \omega.$$

Nous prenons comme condition initiale :

$$a_{\frac{1}{2}} = 1 \quad a_{\frac{3}{2}} = 0.$$

Nous pouvons poser :

$$a_{-\frac{1}{2}}^0 = 1 \quad a_{\frac{1}{2}}^{2n} = 0 \quad a_{\frac{1}{2}}^{2n+1} = 0$$

donc :

$$b_{-\frac{1}{2}}^0 = 1 \quad b_{\frac{1}{2}}^{2n} = 0 \quad b_{\frac{1}{2}}^{2n+1} = 0.$$

L'équation (2.24) se transpose en :

$$b'_p = \sum_q S_{pq}^{-1} b_q,$$

les b'_p satisfont à l'équation :

$$(2.83) \quad i \frac{db'_p}{dt} = \sum_q K_{pq} b'_q.$$

Les conditions initiales concernant les b'_p sont :

$$b'_{p0}(0) = S_{p0}^{-1}.$$

Nous nous limiterons pour S aux termes d'ordre 0 et 1 par rapport à H_1 . Dans notre exemple, les seuls termes que nous considérerons seront S_{00} et $S_{-1,0}$ (rappelons que S_{10} est au moins du 2^e ordre (2.24)).

On obtient :

$$(2.84) \quad \begin{cases} b'_0(t) = e^{-\frac{it}{2}(K_{00}+K_{11})} \left(\cos \frac{at}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{at}{2} \right) S_{00} \\ b'_1(t) = -ie^{-\frac{it}{2}(K_{00}-K_{11})} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{at}{2} S_{00} \end{cases}$$

avec :

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{K_{00} - K_{11}}{a} \quad \sin \frac{\theta}{2} = 2 \frac{K_{01}}{a}$$

$$a = \sqrt{(K_{00} - K_{11})^2 + 4K_{01}^2}.$$

On trouve également $b'_{-1}(t)$.

Retournons aux $b(t)$, puis aux $a(t)$, on obtient :

$$(2.85) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t) &= \left(1 - \frac{K_-^2}{2\omega^2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{at}{2} \\ &+ \frac{|K_-|^2}{2\omega^2} \left(\cos^2 \frac{at}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{at}{2} \right) (1 - \cos 2\omega t) \\ &+ \frac{K_-}{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{at}{2} + B \sin 2\omega t. \end{aligned} \right.$$

B étant un terme de l'ordre de $\frac{K_-}{\omega}$.

Si nous effectuons la moyenne sur φ le terme :

$$\frac{K_-}{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{at}{2}$$

disparaît. Nous négligerons également les termes S du 2^e ordre.

Si nous supposons, comme au paragraphe précédent, que $\omega, \omega_0 \gg \frac{1}{t}$ les termes en $\sin 2\omega t$ et $\cos 2\omega t$ disparaissent. On obtient donc :

$$(2.86) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t) &= \sin^2 \frac{t}{2} \sin^2 \frac{at}{2} \\ &= \frac{4K_-^2}{\left(\omega - \omega_0 - \frac{K_-^2}{\omega}\right) + 4K_+^2} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{\left(\omega - \omega_0 - \frac{K_-^2}{\omega}\right)^2 + 4K_+^2}. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Si nous supposons que le champ est linéaire :

$$H_y = 0 \quad K_+ = K_- = \frac{\gamma}{4} H_z.$$

Nous trouvons que la résonance a lieu pour :

$$(2.87) \quad \omega_0 = \omega - \frac{\gamma H_z^2}{16\omega_0}.$$

Cette formule a été calculée par Bloch et Siegert (12).

L'étude des autres résonances s'effectue de la même façon. On obtient :

$$(2.88) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_0 &\sim (2p+1)\omega. \\ P &= \frac{4 |K_{0,2p+1}|^2}{(K_{00} - K_{2p+1,2p+1})^2 + 4 |K_{0,2p+1}|^2} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{(K_{00} - K_{2p+1,2p+1})^2 + 4 |K_{0,2p+1}|^2} \\ <0 | K_2 | 0> &= \frac{K_+^2}{\omega - \omega_0} + \frac{K_-^2}{\omega + \omega_0} \end{aligned} \right.$$

de même :

$$<2p+1 | K_2 | 2p+1> = \frac{K_+^2}{\omega_0 - \omega} + \frac{K_-^2}{\omega + \omega_0}.$$

Ces termes sont importants ; ils conduisent à un déplacement de la fréquence de résonance, analogue au déplacement Bloch-Siegert. Quel que soit l'ordre de la raie, ces termes varient en H_z^2 . Ils peuvent être plus grands que le terme $<0 | K | 2p+1>$, qui est proportionnel à $\left(\frac{H_z}{\omega}\right)^{2p} H_1$.

Nous aurons donc résonance pour :

$$(2.89) \quad \omega_0 = (2p+1)\omega - \frac{K_+^2}{p\omega} - \frac{K_-^2}{(p+1)\omega}.$$

Calculons maintenant $<0 | K | 2p+1>$.

Pour passer de a^0 à a^{2p+1} , il faut pousser le calcul jusqu'à l'ordre $2p+1$. Les termes de $\mathcal{H}'_1$ n'induisent que des transitions $\Delta n = \pm 1$. Il

faut employer $2p + 1$ terme. Comme nous étudions une transition $\Delta m = +1$, la seule possibilité est d'utiliser $(p + 1)$ termes K_+ :

$$\begin{aligned}\Delta n &= p + 1 \\ \Delta m &= p + 1\end{aligned}$$

et p termes K_- :

$$\begin{aligned}\Delta n &= p \\ \Delta m &= -p.\end{aligned}$$

Il n'y a alors dans K_{2p+1} qu'un seul terme :

$$\langle 0 | K_{2p+1} | 2p + 1 \rangle = \frac{\langle 0 | \mathcal{H}'_1 | 1 \rangle \langle 1 | \mathcal{H}'_1 | 2 \rangle \dots \langle 2p | \mathcal{H}'_1 | 2p + 1 \rangle}{(E_0 - E_1)(E_0 - E_2) \dots (E_0 - E_{2p})}.$$

On trouve :

$$(2.90) \quad \langle 0 | K_{2p+1} | 2p + 1 \rangle = (-1)^p \frac{K_+^{p+1} K_-^p}{2^{2p} (\omega p!)^2}$$

par exemple pour $p = 1$:

$$(2.91) \quad \langle 0 | K_3 | 3 \rangle = -\frac{K_+^2 K_-}{4\omega^2}.$$

Nous pouvons maintenant écrire la probabilité de transition pour n'importe quelle raie, en utilisant la formule (2.88)

d) *Champ d'orientation quelconque.* — Reprenons (2.71).

Nous allons à nouveau remplacer les a par des développements mais la présence des termes en K_+ et K_-^* nous oblige à introduire deux fois plus d'états. Ces termes permettent en effet des transitions $\Delta m = 0$ avec $\Delta n \pm 1$:

$$(2.93) \quad a_{\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\frac{1}{2}}^{(n)} \quad a_{-\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{-\frac{1}{2}}^{(n)}.$$

On obtient :

$$(2.94) \quad \left\{ \begin{aligned} i \frac{da_{\frac{1}{2}}^{(n)}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2} a_{-\frac{1}{2}}^{(n)} - K_{\pi} a_{-\frac{1}{2}}^{(n+1)} e^{i\omega t} - K_{\pi}^* a_{-\frac{1}{2}}^{(n-1)} e^{-i\omega t} \\ &\quad + K_+ e^{i\omega t} a_{\frac{1}{2}}^{(n+1)} + K_- e^{-i\omega t} a_{\frac{1}{2}}^{(n-1)} \\ i \frac{da_{-\frac{1}{2}}^{(n)}}{dt} &= \frac{\omega_0}{2} a_{\frac{1}{2}}^{(n)} + K_{\pi} a_{\frac{1}{2}}^{(n+1)} e^{i\omega t} + K_{\pi}^* a_{\frac{1}{2}}^{(n-1)} e^{-i\omega t} \\ &\quad + K_+ e^{-i\omega t} a_{-\frac{1}{2}}^{(n+1)} + K_- e^{i\omega t} a_{-\frac{1}{2}}^{(n-1)} \end{aligned} \right.$$

Posons :

$$(2.95) \quad b^{(n)} = a^{(n)} e^{i n \omega t}.$$

cule K_{ii} et K_{jj} au second ordre en H_1 , les termes en K_π disparaissent :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}, n \mid K_2 \mid \frac{1}{2}, n \right\rangle = & \left\langle \frac{1}{2}, n \mid K_{2\sigma} \mid \frac{1}{2}, n \right\rangle + \frac{|\left\langle \frac{1}{2}, n \mid K \mid \frac{1}{2}, n+1 \right\rangle|^2}{E_{\frac{1}{2}, n} - E_{\frac{1}{2}, n+1}} \\ & + \frac{|\left\langle \frac{1}{2}, n \mid K \mid \frac{1}{2}, n-1 \right\rangle|^2}{E_{\frac{1}{2}, n} - E_{\frac{1}{2}, n-1}}. \end{aligned}$$

K_σ désignant la partie de K provenant des photons σ_+ et σ_- , déjà calculés au paragraphe précédent.

On obtient :

$$\left\langle \frac{1}{2}, n \mid K_2 \mid \frac{1}{2}, n \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, n \mid K_{2\sigma} \mid \frac{1}{2}, n \right\rangle + \frac{|K_\pi|^2}{\omega} - \frac{|K_\pi|^2}{\omega}.$$

Calcul des éléments non diagonaux (intensité des résonances).

Pour une transition $\omega_0 = p\omega$, $p \neq 0$ (raie d'ordre p), il faut pousser le calcul jusqu'à l'ordre p car $\Delta n = p$:

$$\langle 0 \mid K_p \mid p \rangle = \sum' \frac{\langle 0 \mid \mathcal{H}'_1 \rangle \langle 1 \mid \mathcal{H}'_1 \mid 2 \rangle \dots \langle n-1 \mid \mathcal{H}'_1 \mid n \rangle}{(E_0 - E_1)(E_0 - E_2) \dots (E_0 - E_{n-1})}.$$

La sommation porte sur tous les états intermédiaires.

On trouve par exemple :

$$(2.98) \quad \langle 0 \mid K_2 \mid 2 \rangle = \frac{2K + K_\pi}{\omega}.$$

$$(2.99) \quad \langle 0 \mid K_3 \mid 3 \rangle = \frac{K + K_\pi^2}{\omega^2} - \frac{K^2 + K_-}{4\omega^2}.$$

e) *Spin J supérieur à 1/2* $I=0$. — Nous pouvons déduire les résultats de ceux obtenus pour $J = \frac{1}{2}$ à l'aide de la formule de Majorana.

Nous avons vu que, dans ce cas, dans la région $\omega_0 \sim n\omega$, tout se passe comme si le système était soumis à un champ tournant de fréquence $n\omega$, d'amplitude $\langle 0 \mid Kn \mid n \rangle$, $\mathcal{H}_0$ étant modifié par le terme :

$$\langle 0 \mid K_2 \mid 0 \rangle = \langle n \mid K_2 \mid n \rangle.$$

On peut donc dire que pour ω_0 voisin de $n\omega$, le système atomique est soumis au hamiltonien :

$$(2.100) \quad \left\{ \mathcal{H}_n'' = \left[\gamma_J H_0 + \frac{2K_+^2}{(n-1)\omega} + \frac{2K_-^2}{(n+1)\omega} \right] J_z + \langle 0 \mid Kn \mid n \rangle J_+ e^{-in\omega t} + \langle 0 \mid Kn \mid n \rangle J_- e^{in\omega t} \right.$$

(Rappelons que si $n=1$ ou -1 , on supprime le terme devenant infini). Ce raisonnement est valable si les résonances sont bien séparées, c'est-à-dire si K_+ , K_- , $K_\pi \ll \omega$.

La formule (2.100) est valable pour J quelconque, car pour appliquer les formules de Majorana, il est nécessaire et il suffit que le Hamiltonien conserve la même forme.

3° SPIN NUCLÉAIRE I (J quelconque). — a) *Équation générale.* — $\mathcal{H}_1$ est encore donné par l'équation (2.69) car nous négligeons les termes en γ_i .

Nous partons de l'équation d'évolution :

$$(2.101) \quad i \frac{da_{F,m}}{dt} = \omega_{F,m} a_{F,m} + \sum_{F',m'} \langle F, m | \mathcal{H}_1 | F', m' \rangle a_{F',m'}.$$

Nous décomposons les $a_{F,m}$ en une somme infinie, puis nous posons :

$$b_{F,m}^n = a_{F,m}^n e^{in\omega t}$$

et nous arrivons à un système statique :

$$(2.102) \quad i \frac{db_{F,m}^n}{dt} = (\omega_{F,m} - n\omega) b_{F,m}^n + \sum_{n',F',m'} (K_{FF'mm'}^{nn'}) b_{F',m'}^{n'}.$$

La position des résonances s'obtient en écrivant que deux éléments diagonaux de la matrice définie par (2.102) sont égaux :

$$(2.103) \quad \omega_{F,m} - \omega_{F',m'} = p\omega,$$

p étant un entier quelconque

Nous n'étudierons pas ce problème dans toute sa généralité. Nous allons envisager deux cas particuliers importants.

b) *Le champ oscillant est le long de Oz.* — Dans ce cas, $\mathcal{H}_1$, n'a d'éléments de matrice qu'entre des états de même m . On peut alors résoudre le problème pour l'ensemble des niveaux ayant un m donné.

La position des résonances est :

$$(2.104) \quad \omega_F - \omega_{F'} = p\omega$$

ceci est en accord avec la conservation du moment angulaire. Nous n'avons jamais observé ces résonances.

Remarque. — Avant de quitter les transitions $\Delta m = 0$, notons que si $H_z = 0$, H_x , $H_y \neq 0$, ces transitions peuvent être induites en utilisant les photons σ_+ et σ_- ; pour satisfaire le bilan du moment angulaire, il faut autant de photons σ_+ que de photons σ_- . Les résonances se produiraient alors pour $\omega_F - \omega_{F'} = 2n\omega$.

c) *Transition $\Delta F = 0$ en découplage faible.* — Nous supposons maintenant que les distances entre les sous-niveaux d'un même état F sont très petites devant les distances entre des niveaux de F différents.

Nous supposons aussi que :

$$\omega \ll \omega_F - \omega_{F'}.$$

Dans ces conditions, nous chercherons à résoudre l'équation (2.102) à l'intérieur de chaque état F.

Supposons d'abord le découplage très faible :

$$\vec{J} = a\vec{F}.$$

$$(2.105) \quad \mathcal{H} = \gamma_J a \vec{F} \cdot \vec{H}.$$

Nous sommes ramenés au problème d'un spin rigide $\vec{F}$ quelconque ($\gamma_F = a\gamma_J$).

Les formules de Majorana nous permettent de calculer $P(F, m, m', t)$ à partir de $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t\right)$ pour toutes les valeurs de ω et ω_0 . En particulier si $\omega_0 \simeq n\omega$, nous savons que tout se passe comme si le système était soumis au hamiltonien $\mathcal{H}_n''$ formule (2.100) à condition de remplacer J par F et γ_J par $\gamma_F = a\gamma_J$.

$\mathcal{H}_n''$ s'écrit :

$$(2.106) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_n'' &= \left(\gamma_F H_0 + \frac{2K_+^2}{(n-1)\omega} + \frac{2K_-^2}{(n+1)\omega} \right) F_z + \langle 0 | K_n | n \rangle F_+ e^{-i\omega t} \\ &\quad + \langle 0 | K_n | n \rangle^* F_- e^{i\omega t}. \end{aligned} \right.$$

On doit remplacer γ_J par γ_F dans les termes K_+ , K_- et $\langle 0 | K_n | n \rangle$. Dans le cas où le découplage est rigoureusement nul, cette formule n'a pas d'intérêt car nous connaissons $P(F, m, m', t)$. Son intérêt réside dans le fait qu'on peut l'étendre au cas d'un découplage faible.

Si le découplage n'est plus négligeable, nous n'avons plus le droit d'écrire :

$$\vec{J} = a\vec{F}.$$

Il y a des termes correctifs. Ces termes sont de l'ordre de $\frac{\varepsilon}{\omega_0}$ $\omega_0 = \gamma_F H_0$; ε est défini par (2.52), physiquement ε est de l'ordre de l'écart entre deux raies $\Delta m = 1$ du spectre obtenu en champ tournant.

La partie la plus importante de $\mathcal{H}_n''$ est $\gamma_F H_0 F_z$ car nous avons supposé K_+ , K_- , $K_n \ll \omega$, ω_0 .

Nous ne corrigerons donc que ce terme, les autres termes étant déjà considérés comme des perturbations faibles. Nous remplacerons ce terme par $\mathcal{H}_0$ hamiltonien du système en l'absence des champs oscillants :

$$(2.107) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{H}_n'' &= \mathcal{H}_0 + F_z \left(\frac{2K_+^2}{(n-1)\omega} + \frac{2|K_-|^2}{(n+1)\omega} \right) + \langle 0 | K_n | n \rangle F_+ e^{-i\omega t} \\ &\quad + \langle 0 | K_n | n \rangle^* F_- e^{i\omega t}. \end{aligned} \right.$$

Nous sommes donc entièrement ramenés au problème du paragraphe (II, 2°). Nous avons donc ramené la question de la résolution

du système (2.102) à celle de la résolution de plusieurs systèmes du type (2.17).

Cherchons la position des résonances, soit ω_m les valeurs propres de $\mathcal{H}_0$.

L'équation (2.19) nous indique qu'il y aura résonance quand :

$$\omega_m + m \left(\frac{2K_+^2}{(n-1)\omega} + \frac{2K_-^2}{(n+1)\omega} \right) - \omega_{m'} - m' \left(\frac{2K_+^2}{(n-1)\omega} + \frac{2K_-^2}{(n+1)\omega} \right) = (n\omega)(m-m')$$

posons :

$$(2.108) \quad \delta_n = \frac{2K_+^2}{(n-1)\omega} + \frac{2K_-^2}{(n+1)\omega}.$$

Il y a résonance quand :

$$(2.109) \quad \frac{\omega_m - \omega_{m'}}{m - m'} = (n\omega - \delta_n).$$

Le 1^{er} membre de cette équation ne dépend que des niveaux atomiques, le 2^e membre ne dépend que de la radiofréquence. D'après les formules (2.51) :

$$\omega_n - \omega_{n'} = (m - m')\omega_0 + \varepsilon d_{mm'}.$$

$d_{mm'}$ étant une constante qui dépend des deux niveaux m et m' (2.109) s'écrit :

$$(2.110) \quad \omega_0 + \varepsilon \frac{d_{mm'}}{m - m'} = (n\omega - \delta_n).$$

Décrivons le spectre :

Nous avons d'abord l'ensemble des résonances $n=1$. Ce sont les résonances déjà étudiées en champ tournant. La seule différence réside dans le terme δ_1 , qui est le déplacement Bloch-Siegert.

L'écart entre ces diverses résonances est de l'ordre de ε .

Nous avons ensuite un groupe de résonances pour $n=2$. Ces résonances sont séparées par des intervalles de l'ordre de ε (rappelons que $\varepsilon \ll \omega$).

Puis nous trouvons un groupe de résonances à $n=3$.

Chaque groupe de résonances subit en bloc le déplacement δ_n .

La quantité $\langle 0 | K_n | n \rangle$ est d'ordre n en γH_1 . Elle représente l'amplitude du champ tournant fictif à la fréquence n . Nous proposons de désigner les résonances de la façon suivante :

$$(F, m \rightarrow F, m')^n.$$

F, m et F, m' définissent les deux niveaux atomiques ;

n étant la fréquence du champ tournant fictif ;

$(F, m \rightarrow F, m')^n$ est une raie d'ordre $(m - m')n$, elle se place au voisinage de $\omega_0 = n\omega$.

Nous allons étudier le spectre dans la région $\omega_0 = 2\omega$.

Nous emploierons le hamiltonien :

$$(2.111) \quad \mathcal{H}_2'' = \mathcal{H}_0 + F_z \left(\frac{2K_+^2}{\omega} + \frac{2K_-^2}{3\omega} \right) + \frac{2K + K_\pi}{\omega} F_+ e^{-2i\omega t} + \frac{2K + K_\pi^*}{\omega} F_- e^{2i\omega t}.$$

Nous pouvons maintenant réduire $\mathcal{H}_2''$ en un hamiltonien K_2'' comme nous l'avons fait précédemment pour le hamiltonien (2.4).

Les raies $\Delta m = 1$ sont maintenant des raies à deux quanta. Leur intensité est déterminée par :

$$(2.112) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle m | K'' | m+1 \rangle &= \frac{2K + K_\pi}{\omega} \langle m | F_- | m+1 \rangle \\ &= \frac{2K + K_\pi}{\omega} \sqrt{(F-m)(F+m+1)}. \end{aligned} \right.$$

L'intensité des raies $\Delta m = 2$ est maintenant :

$$(2.113) \quad \left\{ \begin{aligned} &\langle m | K'' | m+2 \rangle \\ &= \frac{\langle m | \mathcal{H}_2'' | m+1 \rangle \langle m+1 | \mathcal{H}_2'' | m+2 \rangle}{E_m - E_{m+1}} \sim \frac{4K^2 + K_\pi^2}{\omega^2 \varepsilon_2}. \end{aligned} \right.$$

La raie est une raie à quatre quanta.

Plus généralement dans le groupe des raies $\omega_0 = 2\omega$, une raie $m = p$ est d'ordre $2p$.

Déterminons maintenant la position des résonances. Pour cela, calculons :

$$\begin{aligned} \langle m | K'' | m \rangle &= 2 = \frac{\langle m | \mathcal{H}_2'' | m+1 \rangle \langle m+1 | \mathcal{H}_2'' | m \rangle}{\omega_m - \omega_{m+1} + 2\omega} \\ &\quad + \frac{\langle m | \mathcal{H}_2'' | m-1 \rangle \langle m-1 | \mathcal{H}_2'' | m \rangle}{\omega_m - \omega_{m-1} - 2\omega}. \end{aligned}$$

Ces termes sont du 4^e ordre en γH_1 , ils sont de la forme $\frac{K^2 + K_\pi^2}{\omega^2 \varepsilon_2}$; ce

terme est négligeable devant le terme $\delta_2 = \frac{2K_+^2}{\omega} + \frac{2K_-^2}{3\omega}$.

Toutes les résonances subissent le même déplacement δ_2 .

Nous pouvons effectuer ce genre de calcul pour tous les groupes de résonance $\omega_0 = n\omega$. Une transition $\Delta m = p$ conduit à une raie d'ordre pn .

Remarque I. — Revenons sur la validité des équations établies. La réduction du système (2.102) ne peut s'effectuer que si l'on pose :

$$(2.79) \quad K_+, K_- \ll \omega, \omega_0.$$

$$(2.81) \quad \Delta\omega \ll \omega, \omega_0.$$

La condition de découplage faible suppose :

$$\varepsilon \ll \omega, \omega_0.$$

Ensuite nous avons réduit les hamiltoniens $\mathcal{H}_n''$.

Deux cas sont à distinguer :

$$(2.114) \quad \langle 0 | K | n \rangle \ll \varepsilon,$$

on réduira $\mathcal{H}_n''$ comme nous l'avons fait au paragraphe II :

$$(2.115) \quad \langle 0 | K | n \rangle \gg \varepsilon.$$

Le découplage sera considéré comme nul ; nous appliquerons les formules de Majorana.

Remarque II. — On peut faire les calculs (dans le cas d'un découplage faible) par une méthode plus rigoureuse. Nous partons du système (2.102) et nous étudierons séparément chaque état F :

$$(2.116) \quad i \frac{db_m^n}{dt} = (\omega_m - n\omega) b_m^n + \sum_{n', m'} K_{mm'}^{nn'} b_{m'}^{n'}.$$

Il y a résonance pour :

$$\begin{aligned} \omega_m - n\omega &= \omega_{m'} - n'\omega \\ \omega &= \frac{\omega_{m'} - \omega_m}{n' - n}. \end{aligned}$$

Comme $\omega_{m'} = m'\omega_0 + d_{m'}\varepsilon$, nous avons sensiblement $\omega \sim \frac{p}{q}\omega_0$ (p et q étant des entiers).

Cette formule met en évidence les résonances que la méthode précédente ne nous a pas permis de trouver. Nous reviendrons plus loin sur ce cas.

Bornons-nous, pour le moment, aux résonances :

$$\omega_0 = f\omega.$$

Ce groupe est produit par les transitions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta m = 1 & \Delta n = p \\ \Delta m = 2 & \Delta n = 2p \\ \dots & \dots \\ \Delta m = q & \Delta n = pq. \end{array} \right.$$

Ces résonances sont distantes de ε .

Nous allons faire subir au hamiltonien (2.101) une transformation canonique qui donnera un K'' qui ne reliera que les niveaux produisant les transitions $\omega_0 \sim p\omega$. Ceci est semblable à la transformation canonique III, 2°), c ; mais la matrice K'' obtenue est une suite de matrices $(2F+1)(2F+1)$. Les calculs s'effectuent comme au paragraphe II, 1°), b . On vérifie alors que toutes les résonances $\omega_0 \sim p\omega$ subissent le même déplacement et que les termes non diagonaux de K'' sont des fonctions linéaires de F_+ et F_- .

Remarque III. — Revenons sur le problème des résonances $\omega_0 = \frac{p}{q} \omega$, $\frac{p}{q}$ non réductible.

Dans le cas du découplage nul, ces résonances n'existent pas, car elles n'existent pas pour $J = 1/2$ comme nous l'a montré le calcul direct.

Considérons le terme couplant les états résonants K_{ij} .

Ce terme est nul si $\varepsilon = 0$. Si nous développons ce terme en puissance de $\frac{\varepsilon}{\omega}$ il a la forme :

$$\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(K_+, K_-, K_{\pi}) + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} f_2 \dots$$

La probabilité associée à ce terme sera donc très faible. Nous n'avons jamais observé de résonance de ce type.

Action de deux champs de fréquences différentes.

Nous venons d'étudier l'action de photons de pulsation ω , ayant différents états de polarisation. Nous envisageons maintenant l'action de photons de fréquences différentes ω et ω' . Nous nous limiterons au cas d'un système atomique $J = 1/2$.

1° ω ET ω' SONT DEUX CHAMPS TOURNANTS.

Nous avons :

$$(2.117) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_1 = \left\{ H_1 \cos \omega t + H'_1 \cos(\omega' t + \varphi) \right\} \vec{i} \\ \quad + \left\{ H_1 \sin \omega t + H'_1 \sin(\omega' t + \varphi) \right\} \vec{j}. \end{array} \right.$$

Ceci conduit à l'équation d'évolution :

$$(2.118) \quad \left\{ \begin{array}{l} i \frac{da_{\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{\omega_0}{2} a_{\frac{1}{2}} + a_{-\frac{1}{2}} \left\{ K_+ e^{-i\omega t} + K'_+ e^{-i\omega' t} \right\} \\ i \frac{da_{-\frac{1}{2}}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} a_{-\frac{1}{2}} + a_{\frac{1}{2}} \left\{ K_+^* e^{i\omega t} + K'^*_+ e^{i\omega' t} \right\} \end{array} \right.$$

(Notons que le système (2.73) se réduit à (2.118) en faisant $\omega' = -\omega$, $K'_+ = K_-$).

Nous utiliserons donc la même méthode de résolution en posant :

$$a_{\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{-\frac{1}{2}}^{(2n)} \quad a_{\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)},$$

puis :

$$\begin{aligned} b_{\frac{1}{2}}^{(2n)} &= a_{-\frac{1}{2}}^{(2n)} e^{i\gamma' \omega - \omega' t}, \\ b_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)} &= a_{\frac{1}{2}}^{(2n+1)} e^{i\omega t + i n(\omega - \omega')}, \end{aligned}$$

ce qui conduit au système :

$$(2.119) \quad \begin{cases} i \frac{db_{-\frac{1}{2}}^{2n}}{dt} = \left[-\frac{\omega_0}{2} - n(\omega - \omega') \right] b_{-\frac{1}{2}}^{2n} + K_+ b_{\frac{1}{2}}^{2n+1} + K'_+ b_{\frac{1}{2}}^{2n-1} \\ \dots \dots \dots \\ i \frac{db_{\frac{1}{2}}^{2n}}{dt} = \left[\frac{\omega_0}{2} - \omega - n(\omega - \omega') \right] b_{\frac{1}{2}}^{2n+1} + K_+ b_{-\frac{1}{2}}^{2n} + K'_+ b_{-\frac{1}{2}}^{2n+2} \end{cases}$$

La position approchée des résonances est donnée par :

$$\omega_0 = \omega + p(\omega - \omega').$$

La probabilité de transition est encore déterminée par les termes diagonaux $K_{ii} - K_{jj}$ et les termes non diagonaux K_{ij} .

$K_{ii} - K_{jj}$ vaut :

$$(2.120) \quad \omega_0 - \omega - p(\omega - \omega') + \frac{2K_+^2}{\omega_0 - \omega'} + \frac{2K'_+{}^2}{\omega_0 - \omega}.$$

Formule valable pour toutes les résonances, sauf $\omega = \omega_0$, $\omega' = \omega_0$, auquel cas on doit supprimer le terme divergent.

La résonance est d'ordre $2p + 1$ et on trouve :

$$(2.121) \quad \left\langle -\frac{1}{2} \mid K_{2p+1} \mid \frac{1}{2} \right\rangle \sim \frac{K_+^{p+1} K'_+{}^p}{(\omega - \omega')^{2p}}.$$

Ce résultat est valable si :

$$(2.122) \quad K_+, K'_+ \ll |\omega - \omega'|.$$

$$(2.123) \quad \Delta\omega \ll |\omega - \omega'|.$$

2° LES CHAMPS ω ET ω' ONT UNE POLARISATION QUELCONQUE — Dans ce cas, il y a six types de photons K_+ , K'_+ , K_- , K'_- , K_π , K'_π .

Il faut introduire deux nombres quantiques n et n' .

Il y a maintenant résonance pour :

$$(2.124) \quad \omega_0 \sim p\omega + q\omega',$$

p et q étant deux entiers positifs ou négatifs quelconques.

La position des résonances calculée au 2° ordre est donnée par la formule :

$$(2.125) \quad \omega_0 = p\omega + q\omega' - \frac{2|K_+^2|}{\omega_0 - \omega} - \frac{2|K_-^2|}{\omega_0 + \omega} - \frac{2|K'_+{}^2|}{\omega_0 - \omega'} - \frac{2|K'_-{}^2|}{\omega_0 + \omega'}$$

(en supprimant, s'il y a lieu, pour les résonances simples, les termes devenant infinis).

Le calcul de $\left\langle \frac{1}{2} \mid K \mid -\frac{1}{2} \right\rangle$ est en général assez fastidieux ; la résonance $\Delta n = p$, $\Delta n' = q$ est d'ordre $|p| + |q|$.

On peut prévoir la forme de $\langle \frac{1}{2} K | - \frac{1}{2} \rangle$, c'est une somme de termes $\frac{K''K'q}{f(\omega, \omega')}$, K et K' étant choisis de façon à respecter la règle de sélection $\Delta m = \mp 1$; $f(\omega, \omega')$ est polynôme de degré $p + q - 1$ en ω et ω' . Ce terme est proportionnel à $H_1^p H_1'^q$.

Ceci est valable moyennant les deux hypothèses :

$$(2.126) \quad K_+, K_-, K'_+, K'_-, K_\pi, K'_\pi \ll \omega, \omega', \omega_0, |\omega - \omega'|.$$

$$(2.127) \quad \Delta \omega \ll \omega, \omega', \omega_0, |\omega - \omega'|.$$

CHAPITRE III

Forme des raies de résonances.

Introduction.

1^o GÉNÉRALITÉS. — La vérification directe des formules de probabilités de transition $P_{ij}(t)$ calculées au chapitre précédent n'est pas possible; nous devons calculer les quantités observables.

Appelons $N = |a_i|^2$ la population du niveau atomique i et N_j celle du niveau j . Nous avons calculé la probabilité de transition $P_{ij}(t)$ entre ces deux niveaux.

Supposons qu'au temps $t=0$:

$$N_i = N_i^0 \quad N_j = N_j^0.$$

Nous aurons :

$$(3.1) \quad \begin{cases} N_i(t) = N_i^0 [1 - P_{ij}(t)] + P_{ji}(t) N_j^0 \\ N_j(t) = N_j^0 [1 - P_{ji}(t)] + P_{ij}(t) N_i^0. \end{cases}$$

Nous constatons que si $N_i^0 = N_j^0$, $N_i = N_j^0 = N_j^0 = N_i^0 = N_j$ et les grandeurs physiques liées aux populations des niveaux i et j ne varient pas au cours du temps. Il est donc nécessaire, pour pouvoir observer $P_{ij}(t)$ qu'une différence de population entre les niveaux i et j préexiste et que la grandeur physique utilisée pour la détection soit liée aux populations.

Nous emploierons des atomes dilués et nous négligerons leurs interactions mutuelles.

Remarquons que l'on a observé dans d'autres laboratoires des résonances multiples sur des résonances nucléaires dans des liquides (1) (14) (25) (29) (32) (37). Nous n'étudierons pas les formes de raies dans ce cas-là.

Nous avons utilisé deux méthodes :

- 1) Un jet d'atomes de sodium orientés optiquement (5) (16) (31)
- 2) Une vapeur saturante d'atomes de sodium (avec ou sans gaz étranger) orientée optiquement.

Kusch a traité le même problème en employant la méthode des jets de Rabi (33). Nous n'étudierons ici que la deuxième méthode.

2° PRINCIPE DE L'ORIENTATION OPTIQUE (16) (31). — Cette méthode a été suggérée par Kastler. Elle consiste à éclairer les atomes avec leur raie de résonance optique, polarisée circulairement (par exemple σ^+) autour de la direction du champ H_0 : au cours du processus d'absorption, la projection sur H_0 du moment angulaire des atomes s'accroît d'une unité.

Les sous-niveaux de l'état excité ne sont plus peuplés uniformément.

Les atomes retombent dans l'état fondamental par émission spontanée. Une dissymétrie de population dans les sous-niveaux de l'état fondamental se produit alors.

En illuminant en permanence avec la raie de résonance, on produit un pompage vers les niveaux de m maximum (ou de m minimum).

Expérience sur la vapeur.

1° PRINCIPE (Pour le détail, renvois aux références (3) (6) (17) (20) (21) (22) (36)).

Nous employons une cellule remplie de vapeur saturante de sodium à 105° (en présence ou non d'un gaz étranger).

On illumine dans la direction de H_0 par les photons σ_+ , on observe la réémission à un angle droit des composantes I_π et I_σ en présence et en l'absence de la radiofréquence (fig. 8). Nous mesurons la quantité :

$$(3.2) \quad i = \frac{I'_\pi}{I_\pi} - \frac{I'_\sigma}{I_\sigma}.$$

I_π et I_σ intensités π et σ sans radiofréquence. I'_π et I'_σ intensités avec radiofréquence.

Cohen (21) a calculé la valeur de i à résonance pour l'atome de sodium en présence d'un gaz étranger pour une résonance simple. Il suppose H_1 suffisamment grand pour égaliser complètement la population des sous-niveaux résonants. Nous allons reprendre ces calculs pour étendre ses résultats à la courbe de résonance entière et pour toutes les valeurs de H_1 . Cohen (8) (26) a montré expérimentalement que les collisions avec les molécules de gaz étranger n'affectaient pas la fonction d'onde des atomes dans l'état fondamental. Nous admettrons ce point. Les collisions avec le gaz étranger peuvent, par contre, être très efficaces pour désorienter les atomes dans un état excité.

Le gaz étranger limite considérablement les déplacements en distance des atomes de sodium. Les inhomogénéités de H_0 seront moins gênantes. Un atome est brusquement soumis à l'action de la radiofréquence (puisqu'il retombe de l'état excité) jusqu'au moment où la détection est effectuée.

2° CALCUL DE LA FORME DE RAIE. — a) *Formalisme général.* — Cohen a fait le calcul dans les hypothèses suivantes :

1) Les composantes D_1 et D_2 de la raie de résonance *ont même intensité.*

2) L'excitation optique est du type « broad line ». C'est-à-dire que tous les sous-niveaux de l'état fondamental sont également excités.

Ces hypothèses sont très importantes : elles entraînent, en particulier, que la probabilité d'absorption d'un photon σ_+ est la même pour tous les sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental.

(Cette propriété provient de ce que l'état fondamental est un état S).

Nous utiliserons les mêmes notations que Cohen. Nous appellerons X un vecteur colonne dont les éléments $Xa, Xb, Xc, \dots$ sont les populations des états $a, b, c, \dots$. Le vecteur a huit éléments.

Cohen a montré que X obéit à l'équation d'évolution (en supposant que l'état excité a une durée de vie très courte) :

$$(3.3) \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{X}{T} - \frac{X}{\tau'} + \frac{\rho}{T} \mathcal{Q}X + \frac{1-\rho}{T} X_0 + \frac{X_0}{\tau'}.$$

Expliquons cette équation.

τ' désigne le temps moyen entre deux collisions d'un atome sur les parois. Le terme $-\frac{X}{\tau'} dt$ donne le nombre d'atomes subissant une collision sur les parois pendant le temps dt , et quittant par suite la multiplicité X .

X_0 est la multiplicité (1, 1, ...). Après collisions sur les parois les atomes sont désorientés totalement, ils retombent dans la multiplicité X_0 . Pendant le temps dt , il en retombe $\frac{X_0}{\tau'} dt$. Appelons T le temps moyen entre l'absorption successive de deux photons par le même atome. $\frac{X}{T}$ est le nombre d'atomes quittant la multiplicité X du fait du pompage. Si nous appelons ρ la proportion des atomes non désorientés dans l'état excité, ces atomes vont dans la multiplicité $\mathcal{Q}X$.

Ils sont au nombre de $\frac{\rho}{T} \mathcal{Q}X dt$.

[$\mathcal{Q}$ est une matrice :

$$\mathcal{Q}_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}.$$

A_{ik} est la probabilité de transition de i vers le niveau k de l'état excité

sous l'influence du pompage. Le niveau k est choisi parmi les niveaux excités de façon à satisfaire la règle de sélection $\Delta m = 1$. B_{kj} est la probabilité de transition du niveau k au niveau j par émission spontanée].

Supposons que le choc à l'état excité redistribue uniformément les atomes dans les sous niveaux Zeeman de l'état excité; ces atomes retombent dans la multiplicité X_0 ; leur nombre est $\frac{1-\rho}{T} X_0 dt$.

Pour établir cette équation, il faut supposer qu'un choc contre un atome de gaz étranger ne désoriente pas les atomes dans l'état fondamental.

À l'état stationnaire, on a $\frac{dX}{dt} = 0$ et l'on obtient la valeur de X atteinte sous l'action du pompage optique et des causes de désorientation énumérées plus haut :

$$(3.4) \quad X_p = (1 - \rho\mu)(1 - \rho\mu\mathcal{P})^{-1} X_0 \quad \mu = \frac{\tau'}{\tau' + T}.$$

Cherchons maintenant l'état d'équilibre atteint en présence de la radiofréquence.

Nous supposons que le pompage optique et la collision sur les parois sont des phénomènes complètement déphasants. C'est-à-dire qu'après l'un de ces deux phénomènes, il faut faire une moyenne sur toutes les phases des amplitudes de probabilités.

Nous supposons qu'au temps $t=0$, on fait agir simultanément la radiofréquence et le pompage optique. Partons de la multiplicité X_0 . Au temps t nous obtenons la multiplicité $X(t)$. $X(t)$ est la superposition de deux multiplicités constituées :

a) par les atomes qui n'ont absorbé aucun photon optique et qui n'ont subi aucun choc sur les parois. Ils ont été soumis à l'action de la radiofréquence pendant le temps t . Supposons que nous étudions une transition bien séparée des autres raies, entre deux niveaux a et b . Soit $P_{ab}(t)$ la probabilité de transition calculée au chapitre II.

Un vecteur X' quelconque devient, au bout du temps t $\mathcal{R}(t)X'$ (comme on peut le voir d'après l'équation (3.1)) :

$$\mathcal{R}(t) = \begin{array}{c} a \quad b \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 - P_{ab}(t) & P_{ab}(t) & 0 \\ P_{ab}(t) & 1 - P_{ab}(t) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \quad \mathcal{R}(t) = 1 + P_{ab}(t) \pi_{ab}$$

avec :

$$\pi_{ab} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Le pourcentage des atomes n'ayant subi aucune des interactions précédentes est : $e^{-\frac{t}{\mu T}}$. La multiplicité obtenue est donc :

$$e^{-\frac{t}{\mu T}} \mathcal{R}(t) X_0 = e^{-\frac{t}{\mu T}} X_0 \quad \text{car} \quad \pi_{ab} X_0 = 0 ;$$

b) par les atomes ayant subi leur dernier événement au temps $t'0 < t' < t$ mais n'ayant rien subi entre t' et t . La multiplicité correspondante est :

$$e^{-\frac{(t-t')}{\mu T}} dt' \left\{ \mathcal{R}(t-t') \rho \frac{\mathcal{R}}{T} X(t') + \left(\frac{1-\rho}{T} + \frac{1}{\tau} \right) X_0 \right\}$$

Le premier terme provient des atomes qui retombent au temps t' sans désorientation dans l'état excité ; ces atomes ont été soumis à la radio-fréquence pendant le temps $(t-t')$.

Le deuxième terme provient des atomes désorientés soit dans l'état excité, soit dans l'état fondamental par un choc sur les parois.

$e^{-\frac{(t-t')}{\mu T}}$ donne la proportion des atomes n'ayant rien subi entre t' et t .

Au total nous avons donc :

$$(3.5) \quad X(t) = e^{-\frac{t}{\mu T}} X_0 + \int_0^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\mu T}} \left\{ \rho \frac{\mathcal{R}}{T} \mathcal{R}(t-t') \mathcal{R} X(t') + \left(\frac{1-\rho}{T} + \frac{1}{\tau} \right) X_0 \right\}$$

Posons $t-t' = u$:

$$X(t) = \int_0^t du e^{-\frac{u}{\mu T}} \rho \frac{\mathcal{R}}{T} \mathcal{R}(u) \mathcal{R} X(t-u) + \left\{ 1 - \rho \mu \left(1 - e^{-\frac{t}{\mu T}} \right) \right\} X_0.$$

Faisons tendre t vers l'infini ; on arrive à un état stationnaire X'_ρ . On peut remplacer $X(t-u)$ par X'_ρ sous l'intégrale. Ceci serait faux si u était voisin de t , mais on peut noter que les valeurs $u > \mu T$ n'apportent aucune contribution à l'intégrale.

Donc :

$$(3.6) \quad X'_\rho = \rho \mu (1 + \bar{P}_{ab} \pi_{ab}) X'_\rho + (1 - \rho \mu) X_0$$

en posant :

$$(3.7) \quad \bar{P}_{ab} = \frac{1}{\mu T} \int_0^\infty P_{ab}(t) e^{-\frac{t}{\mu T}} dt$$

on en déduit :

$$(3.8) \quad X'_\rho = (1 - \rho \mu) [1 - \rho \mu (1 + \pi_{ab} \bar{P}_{ab})]^{-1} X_0.$$

Remarque. — Dans ce raisonnement, l'hypothèse consistant à admettre que tous les niveaux se vident suivant la même loi est essen-

tielle. Sinon, il faut remplacer $e^{-\frac{t}{\mu T}}$ par $e^{-\omega' t}$, ω' étant une matrice diagonale dont les éléments ne sont pas tous égaux).

ω' ne commute pas, en général, avec $\omega(t)$ et on ne peut plus séparer l'action de la radiofréquence et la désintégration de la multiplicité X_0 .

On peut montrer simplement (3) (36) que la quantité observée est proportionnelle à :

$$(3.9) \quad i = \omega^{(\pi)} (X'_\rho - X_\rho).$$

$\omega^{(\pi)}$ est une matrice ligne dont l'élément $\omega^{(\pi)}_i$ est proportionnel à la quantité de lumière π réémise par les atomes du niveau i après l'absorption d'un photon orientateur.

Le calcul de i nous conduit à la formule :

$$(3.10) \quad i \simeq \frac{\bar{P}_{ab}}{1 + \delta_{ab} \bar{P}_{ab}} \quad \delta_{ab} = L_{aa} + L_{bb} - L_{ab} - L_{ab}.$$

L étant la matrice (3.11) $L = \rho \mu \mathcal{L} (1 - \rho \mu \mathcal{L})^{-1}$.

En développant δ_{ab} en puissance de $\rho \mu$, on voit que δ_{ab} est positif et qu'il croît avec $\rho \mu$.

Calculons $\bar{P}_{ab}$. Si les raies sont séparées, $\bar{P}_{ab}$ peut toujours s'écrire sous la forme :

$$(3.12) \quad P_{ab}(t) = \frac{4K_{ab}^2}{p^2[\omega_0 - n\omega - \delta_n]^2 + 4K_{ab}^2} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{p^2(\omega_0 - n\omega - \delta_n)^2 + 4K_{ab}^2}.$$

Si l'on étudie la transition $(\Delta m = p)^n$, on obtient alors (3.7) :

$$(3.13) \quad \bar{P}_{ab} = \frac{2K_{ab}^2}{p^2 \omega_0 - n\omega + \delta_n + 4K_{ab}^2 + \frac{1}{\mu^2 T^2}}$$

et d'après (3.10) :

$$(3.14) \quad i \simeq \frac{2K_{ab}^2}{p^2 \omega_0 - n\omega + \delta_n + \frac{1}{\mu^2 T^2} + 4\left(1 + \frac{\delta_{ab}}{2}\right)K_{ab}^2}.$$

Cette formule donne la forme de raie. Les deux paramètres $\Gamma_1 = \frac{1}{T}$ et δ_{ab} représentent l'influence des caractéristiques de l'appareil. La mesure de i nous permet donc de déterminer le déplacement δ_n et K_{ab} .

La grandeur δ_{ab} est assez gênante, elle dépend de beaucoup de paramètres (pression de gaz étranger, transition étudiée); sa présence nous empêchera de comparer les largeurs aux déplacements des raies, ainsi que les largeurs entre elles. Mais nous verrons qu'en fait, à 10 p. 100 près, ces comparaisons demeurent possibles.

Le paramètre Γ se comporte comme l'inverse d'un temps de relaxation. C'est lui qui définirait la largeur ultime des raies si le champ H_0 était complètement homogène.

b) *Influence des inhomogénéités de champ.* — Nous supposons qu'un atome donné reste dans un champ très homogène pendant le temps T et nous prendrons la moyenne des i sur toutes les valeurs de H_0 .

Posons :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \Delta\omega^2 = p^2(\omega_0 - n\omega - \delta_n)^2 = p^2(\omega_0 - E)^2 \\ K^2 = \frac{1}{\mu^2 T^2} + 4K_{ab}^2 \left(1 + \frac{\delta_{ab}}{2}\right) \quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{\mu T} = \Gamma_1. \end{cases}$$

Faisons l'hypothèse (parfaitement arbitraire) d'une répartition Lorentzienne des inhomogénéités. La probabilité pour que ω_0 soit compris entre ω_0 et $\omega_0 + d\omega_0$ est alors :

$$(3.16) \quad f(\omega_0) d\omega_0 = \frac{1}{\pi} \frac{d\omega_0}{(\omega_0 - \omega_0 - \frac{1}{2T_2})^2 + 1}.$$

Nous devons calculer i :

$$(3.17) \quad \bar{i} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{K_{ab}^2}{p^2}}{(\omega_0 - E)^2 + \frac{K^2}{p^2}} f(\omega_0) d\omega_0.$$

Posons :

$$\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 - E.$$

On trouve :

$$(3.18) \quad \bar{i} \sim \frac{2K_{ab}^2}{p^2} \frac{1 + \frac{KT'_2}{p}}{\frac{KT'_2}{p}} \times \frac{1}{\Delta\bar{\omega}^2 + \left(\frac{1}{T'_2} + \frac{K}{p}\right)^2}.$$

La raie est lorentzienne.

Si $KT'_2 \gg 1$:

$$(3.19) \quad \bar{i} \sim \frac{\frac{K_{ab}^2}{p^2}}{\Delta\bar{\omega}^2 + \frac{K^2}{p^2}}.$$

Les inhomogénéités ne jouent aucun rôle.

Notons que T_1 est remplacé par pT_1 pour une transition $\Delta F = 0$, $\Delta m = p$; les raies $\Delta m = p$ ont donc une largeur limite p fois plus faible que les raies simples.

La largeur à mi-hauteur de i est donnée dans tous les cas par la formule :

$$(3.20) \quad \Delta\nu = 2 \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{p} \sqrt{\frac{1}{T_1^2} + 4K_{ab}^2 \left(1 + \frac{\delta_{ab}}{2} \right)} \right)$$

si $K_{ab} \gg \frac{1}{T_1}$:

$$(3.21) \quad \Delta\nu = 2 \left(\frac{1}{T_2} + \frac{2K_{ab}}{p} \sqrt{1 + \frac{\delta_{ab}}{2}} \right).$$

Remarque. — 1) Nous avons supposé que les raies étaient complètement séparées. S'il n'en est pas ainsi, le calcul se complique beaucoup, l'effet de la radiofréquence ne pouvant plus se représenter par une matrice aussi simple que π_{ab} .

2) L'hypothèse d'une répartition lorentzienne des inhomogénéités est complètement arbitraire. Nous verrons que l'expérience confirme les formules (3.20) et (3.21). Au contraire la variation de i pour $\Delta\omega = 0$ n'est pas donnée par la formule (3.18); cette variation serait en meilleur accord avec la formule (3.14). Il semble donc que les inhomogénéités de H_0 agissent très peu sur l'intensité des résonances.

c) *Cas où la formule de Majorana s'applique.* — L'action de la radiofréquence ne peut plus être représentée par la matrice :

$$\mathcal{R}(t) = (1 + P_{ab}\pi_{ab}).$$

Il faut utiliser :

$$(3.22) \quad \begin{cases} 1 + \sum_{ab} P_{ab}\pi_{ab} \\ P_{ab} = \frac{1}{T_1} \int_0^\infty P_{ab}(t) e^{-\frac{t}{T_1}} dt, \end{cases}$$

$P_{ab}(t)$ étant les probabilités de transition calculées à partir des formules Majorana. Nous n'avons pas mené complètement les calculs dans ce cas. Cependant toutes les quantités $P(F, m, m', t)$ sont comme $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t\right)$ symétriques par rapport à la valeur $\omega_0 = n\omega + \delta_n$.

i sera donc aussi une fonction ne variant pas si on change le signe de $(\omega_0 - n\omega - \delta_n)$. La résonance observée aura donc toujours lieu pour $\omega_0 = n\omega + \delta_n$.

Toutes les quantités P_{ab} calculées par (3.22) conduisent à des largeurs de raies proportionnelles à celle calculée dans le cas d'un spin $1/2$ c'est-à-dire proportionnelle à $\langle \frac{1}{2} | K | -\frac{1}{2} \rangle$. i est une fonction compliquée des P_{ab} , mais nous vérifierons que la largeur de i est également proportionnelle à $\langle \frac{1}{2} | K | -\frac{1}{2} \rangle$.

CHAPITRE IV

Montage expérimental.

L'appareil utilisé est analogue à celui décrit dans les références (3) (21) (36).

1° **La cellule.** — Nous utilisons une cellule sphérique de 10 cm de diamètre sur laquelle sont soudés deux tubes (représentée schématiquement sur la figure 7). Un queue-sot contient le sodium, un tube latéral relie la cellule au réservoir d'argon. La réserve d'argon est formée d'un cylindre fermé par un ergot très fin, une masselotte en fer permet de casser cet ergot et d'introduire l'argon dans la cellule préalablement vidée.

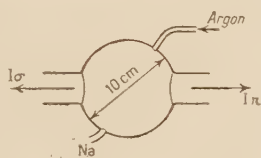


Fig. 7.

2° **Le four.** — La cellule est placée dans un four qui la maintient à une température constante d'environ 105° C.

3° **Montage optique.** — a) *Irradiation.* — Les bancs d'optique sont placés horizontalement dans la direction de H_0 de part et d'autre de la cellule.

Sur chaque banc, nous disposons trois lampes « Philips » So60 placées horizontalement l'une en dessous de l'autre.

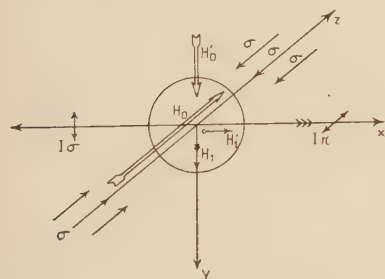


Fig. 8.

L'image des sources est formée au voisinage du centre de la cellule par deux condenseurs de grand diamètre (13 cm) et de courte distance focale (8 cm environ). En avant des condenseurs, on dispose les polariseurs circulaires.

b) *Détection* (fig. 8). — Les bancs d'optique sont horizontaux et perpendiculaires à H_0 , l'un mesure l'intensité de la

lumière π , l'autre celle de la lumière σ réémise par la cellule. On forme l'image du centre de la cellule sur la photocathode d'un photomultiplicateur IP21.

Les signaux des deux photomultiplicateurs sont opposés dans un pont de résistances (18).

On équilibre le pont en l'absence de radiofréquence, soit I_1 le signal du premier photomultiplicateur, I_2 celui du second. Nous avons

$$I_1 = aI_\pi, \quad I_2 = aI_\sigma \quad \text{avec} \quad aI_\pi = bI_\sigma$$

(a , b constantes dépendant des sensibilités, des ouvertures de faisceaux, etc.). On ajoute la radiofréquence, le pont se déséquilibre, les signaux deviennent I'_1 et I'_2 :

$$I'_1 - I'_2 = aI'_\pi - bI'_\sigma$$

$$i = \frac{I'_1 - I'_2}{I_1} = \frac{I'_\pi}{I_\pi} - \frac{b}{a} \frac{I'_\sigma}{I_\sigma} = \frac{I'_\pi}{I_\pi} - \frac{I'_\sigma}{I_\sigma}.$$

Le récepteur est un galvanomètre de sensibilité $4,4 \cdot 10^{-11}$ ampère par millimètre à 1 mètre (12,8 secondes de constante de temps).

4° **Champ magnétique H_0 .** — Le champ principal H_0 est produit par une paire de bobines de Helmholtz. Le champ H_0 est horizontal. Ces bobines peuvent produire un champ de 220 œersteds pour un courant de 10 ampères. Leur diamètre moyen est de 70 cm. Elles sont alimentées par une batterie d'accumulateurs au plomb.

L'intensité du courant parcourant les bobines est mesurée à l'aide d'un potentiomètre Leeds Northrup type K₂. Le shunt est maintenu à la température de la glace fondante. La précision relative de ces mesures est de 10^{-4} .

Dans ces expériences, l'inhomogénéité du champ magnétique joue un rôle fondamental. Afin de mesurer cette inhomogénéité, nous avons construit un appareil à résonance nucléaire de protons utilisant la méthode de Purcell. Cet appareil fonctionnait à 941 kHz, $H_0 \sim 220$ œersteds. La résonance a été observée sur une solution très peu concentrée de nitrate ferrique dans l'eau.

Nous n'avons pas effectué de mesures absolues du champ, mais nous avons étudié la variation du champ H_0 dans l'espace en déplaçant la sonde de résonance nucléaire. La largeur ΔH_0 des résonances mesurée au centre du champ était $\Delta H_0 = 10^{-4} H_0$. Nous avons déplacé la sonde le long de l'axe des bobines ; un déplacement de 3 cm à partir du centre conduit à un déplacement de la résonance des protons de $1,5 \cdot 10^{-4}$ en valeur relative. Enfin, quand on déplace la sonde le long d'un axe perpendiculaire à H_0 , la résonance ne semble pas se déplacer, mais elle s'élargit considérablement pour un déplacement de 5 cm.

Il semble donc que l'on puisse garantir un $\frac{\Delta H_0}{H_0}$ de l'ordre de 10^{-4} sur

une sphère de 3 cm de rayon. Notons que la valeur théorique est de l'ordre de $0,5 \cdot 10^{-4}$.

L'axe du champ créé par ces bobines était placé sensiblement parallèle à la composante horizontale du champ terrestre.

Nous avons également un deuxième système de bobines de Helmholtz créant un champ vertical destiné à compenser la composante verticale du champ terrestre ou bien à faire légèrement varier la direction du champ total H_0 . Les bobines de ce deuxième système ont 1,10 m de diamètre, le champ qu'elles produisent peut aller jusqu'à 4 oersteds.

Dans toutes nos expériences, nous maintenons la fréquence du champ oscillant fixe (oscillateur à quartz) et nous faisons varier le champ magnétique H_0 .

5° **Champ radiofréquence.** — a) *Production.* — La cellule est entourée par deux bobines placées approximativement en position de Helmholtz. Le champ H_1 est voisin de la verticale.

Nous avons utilisé des fréquences comprises entre 941 kHz et 14 MHz. La puissance utilisée pouvait monter jusqu'à 50 watts.

Nous avons également fait des expériences où l'on utilise simultanément deux champs de radiofréquence ω et ω' .

On dispose alors autour de la cellule une deuxième paire de bobines donnant un champ H'_1 horizontal et perpendiculaire à H_0 .

Les oscillateurs sont des oscillateurs pilotés par quartz, suivis d'un ou deux étages d'amplification de puissance.

b) *Mesures de H_1 .* — Dans le cas général, on dispose, à l'intérieur du four, une boucle accordée; le voltage induit aux bornes de la boucle est redressé par une diode 1N34; on mesure le voltage continu apparu aux bornes du circuit.

Nous avons vérifié que ce voltage est proportionnel à H_1 aux fréquences utilisées sauf pour les très faibles valeurs de H_1 . Pour étalonner ce voltmètre de crête, nous avons remplacé le générateur pilote par quartz par un générateur commercial « Férisol » oscillant à la même fréquence et qui est muni, à la sortie, d'un atténuateur à décades étalonné.

Dans les expériences où nous utilisons deux fréquences, le dispositif est peu commode. Nous devons, en effet, mesurer simultanément les champs H_1 et H'_1 . Les fréquences utilisées étaient voisines (1 MHz, 206 et 941 kHz) et il est difficile de construire des voltmètres de crête de sélectivité suffisante. Les fréquences employées étant relativement basses, nous mesurons directement le voltage haute fréquence aux bornes des bobines créant H_1 et H'_1 à l'aide de voltmètres électroniques. Ces voltages varient entre 50 volts et 0,5 volt. Dans ces conditions, le champ H_1 induit sur le circuit de mesure de H'_1 un voltage 100 fois plus faible que sur son propre circuit de mesure (et réciproquement).

CHAPITRE V

Résultats expérimentaux.

Introduction.

Dans le chapitre II, nous avons séparé le cas d'un champ H_1 tournant du cas général. En pratique, nous utilisons toujours un champ linéaire. Ce champ se décompose en une composante le long de H_0 et une composante parallèle à H_0 . Dans ces conditions, les champs tournants droits et gauches ont la même amplitude $K_+ = K_-$. Si nous voulons étudier les résonances en champ tournant, nous devons nous placer dans des conditions telles que l'effet des photons K_+ et K_- soit négligeable. Pour cela, nous avons utilisé des fréquences assez élevées $\omega \geq 5$ MHz et des puissances faibles (inférieures à 10 watts). Dans ces conditions, pour $\omega \sim \omega_0$, le seul effet parasite est un déplacement d'ensemble des raies de la quantité $\frac{K^2}{\omega}$ (négligeable dans les expériences).

Au contraire, si nous voulons étudier les résonances multiples utilisant les photons K_+ et K_- , nous nous placerons à des fréquences plus basses $\omega < 4$ MHz et nous utiliserons des puissances pouvant aller jusqu'à 50 watts.

Les vérifications que nous avons effectuées portent sur les points suivants :

- 1) mise en évidence des résonances multiples ;
- 2) position des résonances, variation de la position avec H_1 ;
- 3) largeur des raies $\Delta\nu$, variation de la largeur avec H_1 ;
- 4) intensité I des résonances.

Les expériences sont conduites de la manière suivante : nous fixons ω , nous fixons aussi le niveau de radiofréquence (c'est-à-dire K_+ , K_- et K_π) et nous étudions le spectre en faisant varier ω_0 . On recommence ensuite pour une autre valeur de H_1 .

Résonances en « champ tournant ».

Nous n'avons étudié que les résonances $\Delta F = 0$; elles se placent toutes dans la région $\omega_0 \sim \omega$.

Nous avons fait des mesures à trois fréquences : 4,95 MHz, 8,07 MHz et 14 MHz ; elles ont été choisies relativement basses afin de réduire

autant que possible l'effet des inhomogénéités du champ H_0 . Toutefois, nous ne pouvons descendre plus bas en fréquence, car les diverses résonances simples ne seraient plus séparées.

Les vérifications ont été effectuées de la façon suivante :

Pour une fréquence donnée, on étudie : 1°) la variation de la largeur des résonances simples en fonction de H_1 . On compare les largeurs des diverses résonances simples entre elles, puis on porte $\Delta\nu = f(H_1^2)$ pour les résonances doubles, on compare les largeurs des

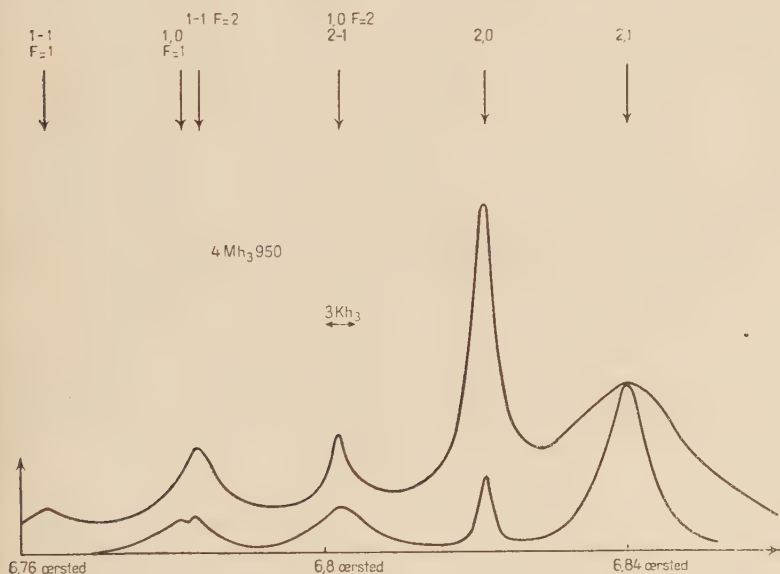


Fig. 9.

diverses résonances doubles, puis on compare ces largeurs à celles des résonances simples. On passe ensuite aux résonances triples, etc. ;

2°) on étudie ensuite les amplitudes en fonction de H_1 et éventuellement les déplacements (Ils sont toujours faibles et n'ont été observés qu'à 14 MHz).

a) 4,95 MHz (deux spectres typiques sont représentés sur la figure 9).

La courbe supérieure est obtenue en utilisant un niveau de radio-fréquence plus élevé.

Largeurs.

Résonances simples. — Nous avons d'abord porté les variations de $\Delta\nu(2 \rightarrow 1)$ et $\Delta\nu(1 \rightarrow 0, F=2)$ en fonction de H_1 ; on obtient des

droites sauf aux très faibles valeurs de H_1 (fig. 10). Ceci s'explique si on admet la formule :

$$(3.20) \quad \Delta\nu_{ab} = 2\left(\Gamma_2 + \sqrt{\Gamma_1^2 + 4K_{ab}^2\left(1 + \frac{\delta_{ab}}{2}\right)}\right).$$

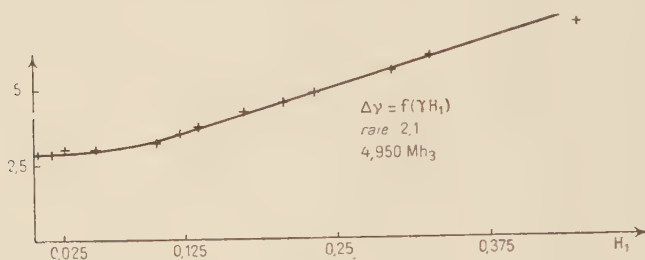


Fig. 10.

Si $K_{ab} \gg \Gamma_1$ (largeur intrinsèque des raies) :

$$(3.21) \quad \Delta\nu_{ab} = 2\left[\Gamma_2 + 2K_{ab}\left(1 + \frac{\delta_{ab}}{2}\right)\right] \quad \Gamma_2 \text{ (inhomogénéité)}$$

cette courbe est une droite comme le montre l'expérience.

Elle tend vers $2\Gamma_2$ quand K_{ab} tend vers 0. Or $\Delta\nu_{ab}$ tend vers $2(\Gamma_2 + \Gamma_1)$ d'après (3.20). La courbe $\Delta\nu_{ab}(H_1)$ est donc au-dessus de la droite (3.21) pour H_1 petit. C'est ce que l'on observe sur la figure 10.

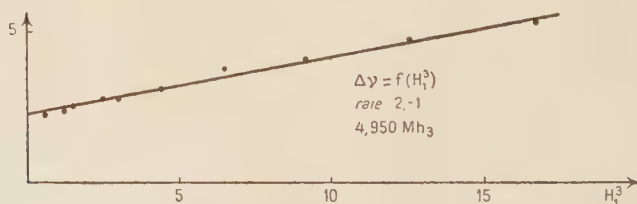


Fig. 11.

Ceci nous permet une évaluation, assez peu sûre d'ailleurs, de Γ_2 et Γ_1 :

$$2\Gamma_2 = 1,35 \text{ kHz} \quad 2\Gamma_1 = 400 \text{ Hz},$$

dorénavant nous poserons :

$$\Delta\nu_{ab}^* = \frac{4K_{ab}}{p} \sqrt{1 + \frac{\delta_{ab}}{2}}.$$

(p ordre de la raie) $\Delta\nu_{ab}^*$ est la contribution du champ de radiofréquence à la largeur de raie.

Ces quantités se déduisent des réseaux de courbes précédents donnant $\Delta\nu(\gamma H_1)$ (ce sont des droites pour γH_1 grand) :

On peut ainsi former le rapport $\frac{\Delta\nu_{2,1}^*}{\Delta\nu_{10(F=2)}^*}$; on trouve expérimentalement 1/1.35.

Si on suppose les facteurs δ_{ab} voisins pour les deux raies, le rapport théorique vaut :

$$\frac{\Delta\nu_{2,1}^*}{\Delta\nu_{1,0}^*} = \frac{K_{21}}{K_{10}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 1/1,25.$$

Ces deux valeurs sont en accord à 10 p. 100 près.

Résonances doubles. — Nous avons étudié la raie $2 \rightarrow 0$. La courbe $\Delta\nu_{2,0}(\gamma H_1^2)$ est une droite sauf aux très faibles valeurs de H_1 .

Aux faibles valeurs de γH_1 , l'effet est de même nature que pour les raies simples (Γ_1 devant être remplacé par $\frac{\Gamma_1}{2}$) on en déduit :

$$2\Gamma_2 = 1,35 \text{ kHz} \quad 2 \cdot \frac{\Gamma_1}{2} = 180 \text{ Hz}$$

en bon accord avec les mesures précédentes.

Nous avons, en outre, les formules suivantes :

$$K_{2,1} = 2K_+ \quad K_{2,0} = 2\sqrt{6} \frac{K_+}{\epsilon}$$

(ϵ est la distance de la raie $2 \rightarrow 1$ à la raie $2 \rightarrow 0$).

La mesure de $\Delta\nu_{2,1}^*$ nous donne donc K_+ et par suite, nous permet de calculer $K_{2,0}$ donc $\Delta\nu_{2,0}^*$.

Par exemple, pour un niveau donné H_1 , nous avons trouvé $\Delta\nu_{2,0}^* = 8$ théorique, 7 observé.

De nombreuses vérifications de ce type ont été faites et ont toujours donné un assez bon accord avec les valeurs théoriques.

Raie triple ($2, -1$).

La courbe $\Delta\nu(\gamma H_1^3)$ est une droite (fig. 11).

On trouve ici :

$$2\left(\frac{\Gamma_1}{3} + \Gamma_2\right) = 1,4 \text{ kHz.}$$

De même la comparaison des facteurs d'élargissement des raies simples ($2 \rightarrow 1$) et triples ($2 \rightarrow -1$) conduit à la valeur théorique $\Delta\nu_{2,-1}^* = 3,2$, on observe 3,8.

En résumé, il est possible de rendre compte des variations de largeur à l'aide des trois paramètres Γ_1 , Γ_2 , K_+ . Dans nos expériences,

Γ_1 est trois fois plus petit que Γ_2 et ne joue un rôle important qu'aux très faibles niveaux de H_1 . La proportionnalité des coefficients d'élargissement aux éléments de matrices K_{ab} se vérifie très bien.

Amplitudes :

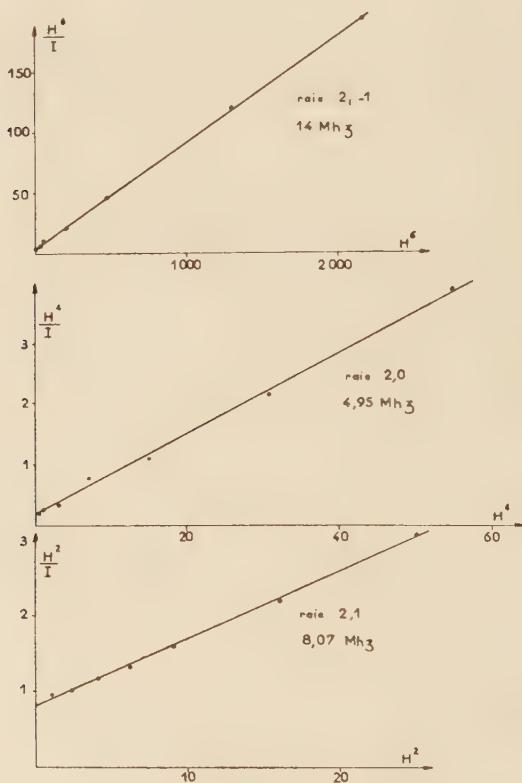


Fig. 12.

Les courbes $\frac{H_1^{2p}}{I} = f(H_1^{2p})$ sont, dans tous les cas, des droites et cela avec une très bonne approximation (fig. 12).

La variation de I semble être en bon accord avec la formule :

$$(5.1) \quad I = \frac{K_{ab}^2}{\Gamma_1^2 + 4K_{ab}^2 \left(1 + \frac{\delta_{ab}}{2} \right)}.$$

Cette formule n'est pas en accord avec (3.18) pour $\overline{\Delta\omega} = 0$.

Elle est en contradiction avec l'hypothèse d'une répartition lorentzienne des inhomogénéités. (5.1) est, par contre, en accord avec (3.14), formule où l'on ne tient pas compte des inhomogénéités.

Nous n'avons pas observé de déplacements.

Ces déplacements seraient de l'ordre de $\frac{K_+^2}{\varepsilon}$, or $K_+ \ll \varepsilon$ (2.65), donc $\frac{K_+^2}{\varepsilon} \ll \varepsilon \sim 10$ kHz ; ils seraient petits devant la largeur des raies.

Des mesures ont été effectuées à d'autres fréquences. Les vérifications se font de la même manière. Le but que nous poursuivions était de voir si les vérifications précédentes n'ont pas un caractère accidentel.

b) 8 MHz 07.

Nous avons vérifié la linéarité de $\Delta\nu_{2,1}(\gamma H_1)$ et $\Delta\nu_{1,0}(\gamma H_1)$. Nous trouvons aussi :

$$\frac{\Delta\nu_{1,0}^*}{\Delta\nu_{2,0}^*} = 1,2 \quad (\text{valeur théorique } 1,25).$$

Nous obtenons de même :

$$2(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 2,5 \text{ kHz.}$$

L'étude des raies doubles $2 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow -1$ ($F=0$), $1 \rightarrow -1$ ($F=1$) conduit à des largeurs limites $2\left(\frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_2\right) = 2,2$ kHz. Soit $2\Gamma_1 = 600$ Hz, valeur un peu différente de celle trouvée précédemment :

$$2\Gamma_2 = 1,9 \text{ kHz.}$$

On obtient de même pour le rapport des coefficients d'élargissement des raies doubles :

	Expérience	Théorie
$\frac{\Delta\nu_{1 \rightarrow -1, F=2}^*}{\Delta\nu_{2,0}^*}$. . .	1	1,25
$\frac{\Delta\nu_{2,0}^*}{\Delta\nu_{1 \rightarrow -1, F=2}^*}$. . .	2,1	2,4

Les coefficients d'élargissement des raies doubles peuvent être comparés à celui de la raie simple 2.1.

On trouve :

	Théorie	Expérience
$\Delta\nu_{20}^*$	25	26
$\Delta\nu_{1 \rightarrow -1, F=2}^*$. . .	28	26
$\Delta\nu_{1 \rightarrow -1, F=1}^*$. . .	11	12

ce qui est ici encore en très bon accord.

De même pour les raies triples (la raie 2.1 servant toujours de point de comparaison) :

	Théorie	Expérience
$\Delta v_{2,-1}^*$	14	15,5
$\Delta v_{1,-2}^*$	14	12,5

La largeur limite des raies triples vaut :

$$2\left(\frac{\Gamma_1}{3} + \Gamma_2\right) = 2 \text{ kHz.}$$

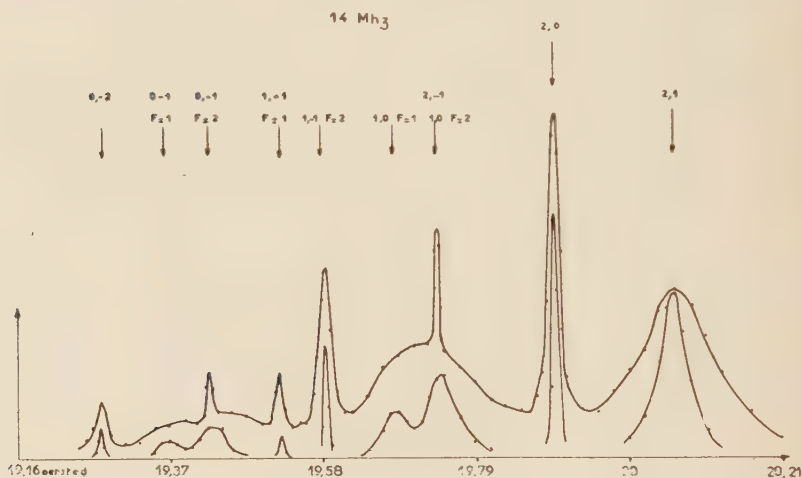


Fig. 13.

Les amplitudes obéissent à la loi (5.1) (fig. 12) (Cette loi est valable aussi pour la raie quadruple).

c) 14 MHz (fig. 13).

On a étudié les largeurs des trois raies simples :

(2 $\rightarrow$ 1), (1 $\rightarrow$ 0, F=2), (1 $\rightarrow$ 0, F=1) (fig. 14).

On obtient $2(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 4,1 \text{ kHz}$ à partir des largeurs limites :

	Théorie	Expérience
$\frac{\Delta v_{1,0F=2}^*}{\Delta v_{2,1}^*}$	1,25	1,1
$\frac{\Delta v_{2,1}^*}{\Delta v_{1,0F=1}^*}$	1,4	1,4

Raies doubles.

Les largeurs limites conduisent à la valeur :

$$2\left(\frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_2\right) = 3,9 \text{ kHz}$$

d'où :

$$2\Gamma_1 = 400 \text{ Hz} \quad 2\Gamma_2 = 3,5 \text{ kHz.}$$

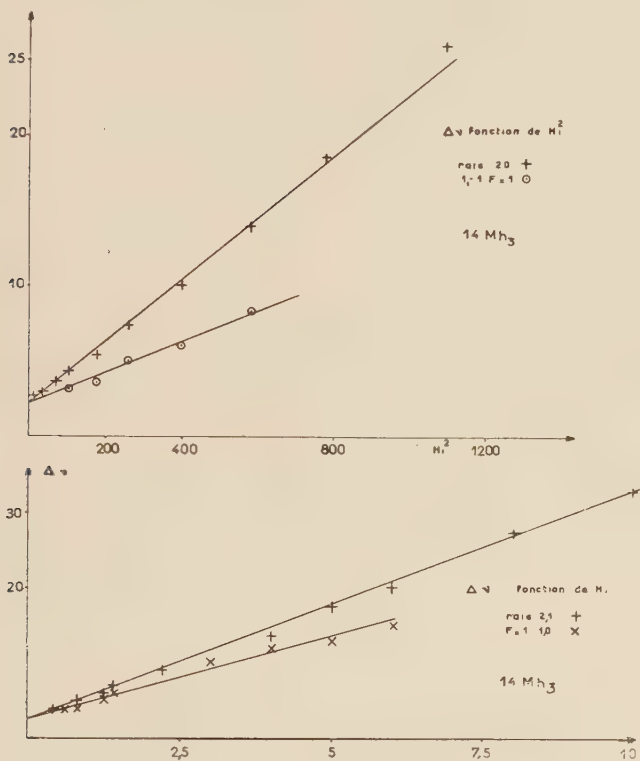


Fig. 14.

On obtient de même :

	Expérience	Théorie
$\frac{\Delta\nu_{1,-1F=2}^*}{\Delta\nu_{20}^*}$	1,1	1,25
$\frac{\Delta\nu_{20}^*}{\Delta\nu_{1,-1F=1}^*}$	2,1	2,4
$\frac{\Delta\nu_{20}^*}{\Delta\nu_{0,-2}^*}$	1	1

et pour les coefficients d'élargissement :

	Expérience	Théorie
$\Delta\nu_{20}^*$	11,5	12,5
$\Delta\nu_{1,-1F=2}^*$. . .	12	15
$\Delta\nu_{1,-1F=1}^*$. . .	5,8	5
$\Delta\nu_{0,-2}^*$	11,5	12,5

La valeur théorique étant obtenue à partir de $\Delta\nu_{2,1}^*$.

Enfin dans le cas de la résonance $2 \rightarrow -1$, on obtient :

$$2\left(\frac{\Gamma_1}{3} + \Gamma_2\right) = 3,8 \text{ kHz.}$$

	Expérience	Théorie
$\Delta\nu_{2 \rightarrow -1}^*$. . .	2,5	3

Les amplitudes suivent la loi (5.1) (fig. 12).

Ici, nous avons observé un déplacement de la résonance simple 2,1.

Le déplacement est du bon ordre de grandeur. La dispersion des résultats est importante.

Détermination de Γ_1 et Γ_2 . — Ainsi les déterminations de Γ_1 , déduites de la différence de largeur entre une résonance simple et une résonance double (ou triple), sont peu précises. Pour déterminer Γ_1 et Γ_2 , nous allons porter la largeur limite des résonances simples en fonction de ω_0 . Si, comme nous devons nous y attendre, Γ_2 est dû aux inhomogénéités et si Γ_1 varie peu avec le champ, cette courbe sera une droite dont la valeur extrapolée pour $\omega_0 = 0$ déterminera Γ_1 largeur intrinsèque.

En plus des trois points déjà déterminés, nous avons mesuré les largeurs limites à 4,035 MHz et 6,5 MHz (d'autres points provenant de résonances multiples avec $\Delta m = 1$ viendront se placer sur cette courbe).

La courbe obtenue (fig. 15) est bien une droite, la valeur de Γ_1 déduite par extrapolation est :

$$2\Gamma_1 = 440 \text{ hertz} \pm 50.$$

Nous avons ainsi porté la largeur limite des résonances doubles $2\left(\frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_2\right)$, on obtient une droite parallèle environ 200 hertz en dessous de la précédente (Ceci montre que Γ_2 est dû aux inhomogénéités du champ et que Γ_1 est indépendant de ω_0). Notons que Γ_2 vaut 260 hertz par mégahertz, ceci correspond à une inhomogénéité $\frac{\Delta H_0}{H_0}$ de $\frac{1}{4000}$ en bon

accord avec les mesures de résonance nucléaire faites à l'intérieur des bobines de Helmholtz.

Nous avons supposé que Γ_1 provenait en grande partie du temps entre l'absorption successive de deux photons optiques par le même atome. Nous avons cherché à vérifier cette dépendance. Pour cela, nous avons coupé par deux l'intensité de la lumière orientatrice et nous avons mesuré

Fig. 16.

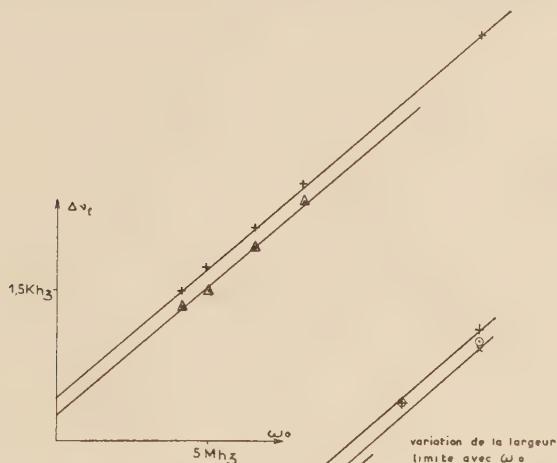
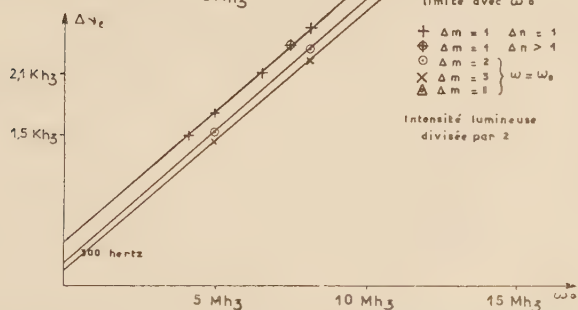


Fig. 15.



à nouveau les largeurs limites des résonances simples. Nous avons à nouveau tracé la courbe donnant les largeurs limites en fonction de ω_0 . Les points se placent à peu près sur une droite parallèle à celle obtenue avec une intensité lumineuse normale. L'extrapolation conduit à un Γ_1 voisin de la moitié de Γ_1 (fig. 16).

3° **Expériences sur les résonances multiples** $\Delta n > \Delta m$. — a) **Expérience sur des raies du « type Majorana »**. — Nous avons repris et complété les expériences effectuées par Margerie (28) à 1 MHz 206 (nos mesures ont été faites sur la vapeur de sodium en l'absence d'argon).

Les diverses raies du spectre précédent sont alors pratiquement superposées les unes aux autres. Dans ce cas, les probabilités de transition sont données par les formules de Majorana. Margerie avait mis en évidence les raies $2\omega = \omega_0$; $3\omega = \omega_0$; etc. Il avait mesuré leurs déplacements, mais n'avait pu mettre en évidence le déplacement de la raie simple. Il n'avait fait aucune étude de largeur et de variation d'amplitude simple. Il ne compensait pas le champ terrestre. Nous avons fait une première série d'expériences en ne composant pas la composante

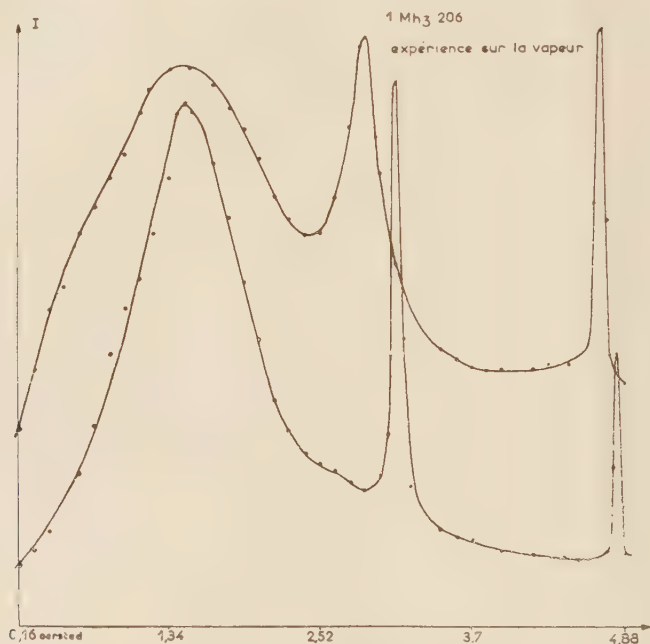


Fig. 17.

verticale du champ terrestre. La figure 17 montre un spectre obtenu dans de telles conditions.

1) *Déplacements.* — La position des raies en fonction de H_1^2 est donnée par les formules (2.8g) ($K_- = K_+$).

Si on porte la position des raies doubles et triples en fonction de H_1^2 , on obtient des droites. Le rapport des pentes de ces droites est 1,73; la théorie prévoit 1,78. Les déplacements des raies doubles et triples sont donc cohérents entre eux, mais on n'observe pas de déplacement sur la raie simple.

2) *Largeurs*. — $\Delta\nu(H_1)$ est une droite sauf aux très faibles valeurs de H_1 où l'on observe plutôt la loi :

$$\Delta\nu^2 = 4[\Gamma^2 + a_i^2(\gamma H_1)^2].$$

Γ est de l'ordre de 3,5 kHz. Γ n'a, *a priori*, aucune relation avec le Γ_1 déterminé au chapitre précédent. Il provient très probablement du fait que ε n'est pas complètement nul, les diverses raies simples ne coïnci-

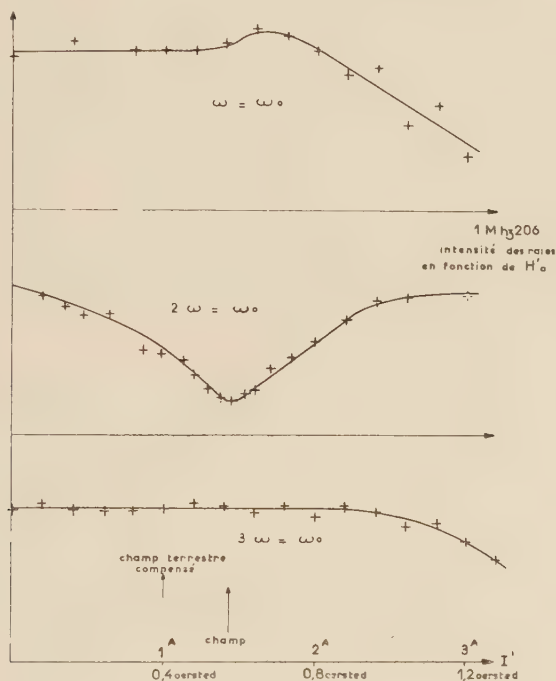


Fig. 18.

dent pas exactement. Aux très faibles valeurs de γH_1 , nous observons la superposition non résolue de toutes les résonances. $\varepsilon \sim 0,72$ kHz; l'ensemble du spectre s'étend sur $6\varepsilon \sim 4,3$ kHz (si toutes les résonances avaient la même amplitude, on devrait observer au moins cette largeur).

Pour la raie double $2\omega = \omega_0$, on trouve $\Delta\nu_2 \simeq bH_1^2$ sauf aux très faibles valeurs de γH_1 .

La raie triple obéit à la loi :

$$\Delta\nu_3^2 = [\Gamma_3^2 + (\gamma H_1)^6].$$

En résumé, le seul résultat en désaccord avec la théorie semble être l'absence de déplacement Bloch-Siegert de la raie simple. Or cette raie se produit dans un champ H_0 de 2 oersteds, la composante verticale du champ terrestre produit une inclinaison notable du champ total. Nous décrivons la raie en faisant varier H_0 ; ceci modifie cette inclinaison et peut perturber de façon notable l'aile de la raie du côté des champs faibles.

Compensation du champ terrestre.

La théorie prévoit que la résonance double n'existe que si $K_\pi \neq 0$, c'est-à-dire que si la projection du champ oscillant sur le champ constant H_0 n'est pas nulle. En faisant varier la composante verticale du champ terrestre H'_0 , on fait pivoter le champ total et l'on doit trouver une valeur de H'_0 telle que $K_\pi = 0$; pour cette valeur, la raie double doit disparaître, les raies simples et triples n'étant pas affectées.

Nous avons donc étudié la variation d'intensité des trois résonances avec H'_0 . Nous avons choisi la grandeur de H_1 dans chaque expérience de façon que la hauteur de la résonance soit très sensible à une modification du terme K_{ij} qui assure le couplage des deux niveaux résonants, de façon à déceler un changement possible d'intensité des raies simples et triples.

Dans le cas de la résonance *double*, nous observons un minimum prononcé d'intensité pour un champ vertical compensateur un peu supérieur à celui compensant la composante verticale du champ terrestre. L'intensité minimum est quatre fois plus faible que l'intensité en l'absence de compensation. Comme H_1 n'a pas la même direction sur tout le volume de cellule, le minimum observé n'est pas nul (fig. 18).

Nous avons fait la même expérience pour la raie triple; l'intensité de la raie ne présente pas de minimum. Elle décroît pour H'_0 très grand (ceci est dû à ce que la lumière n'est plus σ_+ ; en outre, le champ de radiofréquence n'a plus l'orientation convenable par rapport au champ statique, K baisse si H'_0 devient trop grand).

Pour la raie *simple*, on observe un maximum d'intensité pour la valeur de H'_0 qui donnait le minimum d'intensité pour la raie double (ceci peut être dû à deux raisons: une meilleure polarisation de la lumière orientatrice et un maximum de K au moment où K_π est nul). Nous observons également une baisse de signal quand H'_0 devient grand.

Nous avons tracé un nouveau réseau de résonances simples en fixant H'_0 à la valeur annulant K_π . Nous avons constaté que dans ces conditions on observait un déplacement Bloch-Siegert de la raie simple.

Nous avons mesuré à nouveau les déplacements des trois raies. Le déplacement des raies doubles et triples n'est pas affecté par la pré-

sence de H'_0 , ce qui est conforme à la théorie (si on suppose que K ne varie pas), ce déplacement ne dépendant pas de K_π .

Le déplacement δ_1 de la raie simple est linéaire en H_1^2 (fig. 19). Si l'on compare la pente de cette droite à la pente correspondante pour la raie triple, on trouve 1,6 ; la théorie prévoit 1,5. Ainsi les déplacements des trois raies sont cohérents les uns par rapport aux autres.

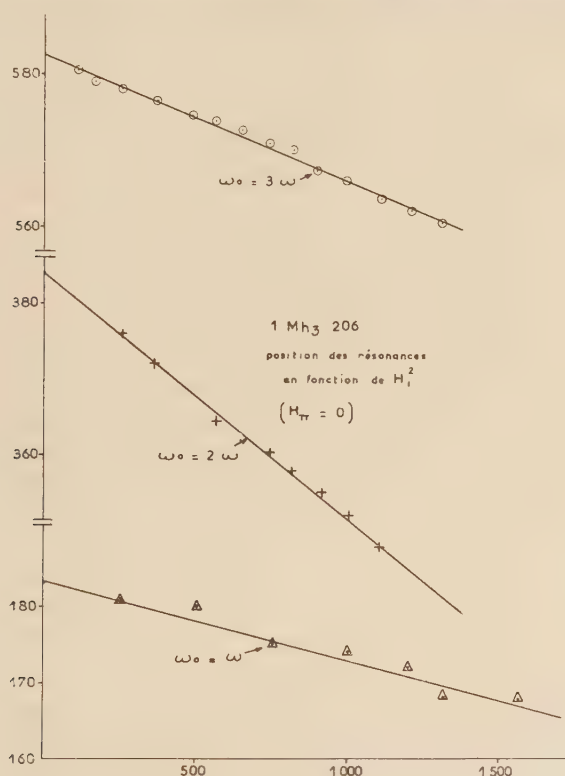


Fig. 19.

b) ÉTUDE DES RÉSONANCES SÉPARÉES. — Nous avons ensuite opéré à des fréquences plus élevées de façon à séparer les différentes résonances $\Delta m = 1$. Nous avons utilisé deux fréquences 2,4625 MHz et 3,865 MHz. Cela nous a conduit à utiliser des puissances de radio-fréquence importantes (~ 50 watts). La figure 20 montre la nature du spectre observé dans la région $2\omega \sim \omega_0$. On observe deux résonances $\Delta m = 1$, mais on observe aussi deux résonances ($\Delta m = 2$) qui sont, en fait, des résonances quadruples.

Déplacements. — Nous avons étudié le groupe des résonances $2\omega \sim \omega_0$. Nous avons porté la position des raies $(2 \rightarrow 1)^2$ $(2 \rightarrow 0)^2$ $(1 \rightarrow 0)^2$ $(1 \rightarrow -1)^2$ en fonction de H_1^2 . On a obtenu une série de droites parallèles (fig. 21) conformément à la théorie (voir chap. II, 3^o, c). Nous avons fait une vérification analogue pour les résonances $3\omega \sim \omega_0$ (fig. 21). On trouve une série de droites parallèles. Nous avons comparé les pentes des droites entre les deux groupes de résonances. La théorie donne 1,78 ; l'expérience donne 1,7 à 2,4 MHz et 1,83 à 3,8 MHz ; l'accord est satisfaisant.

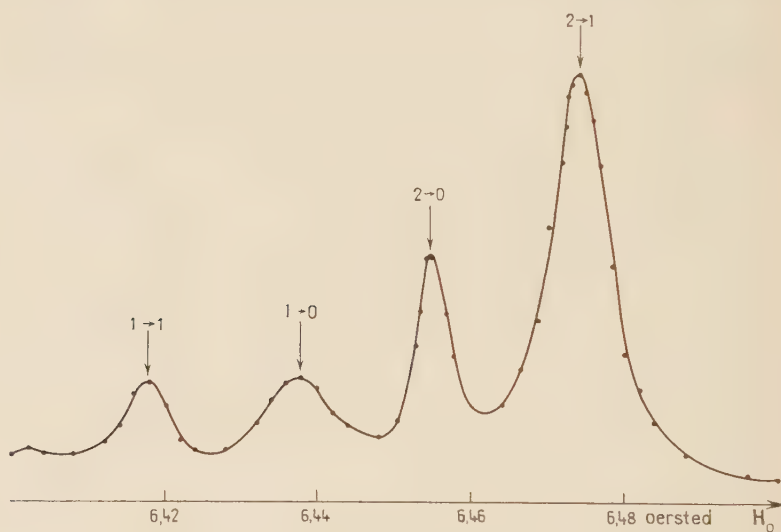


Fig. 20.

LARGEURS. — a) *Groupe des résonances* $\omega_0 = 2\omega$. — A 2,4 MHz, nous avons étudié la largeur $\Delta\nu$ des raies $(2,1)$ et $(1,0 \text{ } F=2)^2$ en fonction de H_1^2 . On trouve des droites (fig. 22).

On obtient $2(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 1,65$ kHz, valeur voisine de celle obtenue pour les résonances simples à 4,95 MHz (1,75 kHz) ; ici le champ $\omega_0 \sim 2\omega$ correspond à la fréquence 4,925 kHz.

Remarque. — Les Γ_2 sont donc les mêmes et ce résultat montre que les Γ_1 ne varient pas entre une transition $(\Delta m = 1)$ et une transition $(\Delta m = 1)^2$. Ce résultat est conforme à la théorie.

A 3,885 MHz, nous avons étudié la variation de la *largeur* de la raie $(2 \rightarrow 1)^2$ $\Delta n = 2$; elle est linéaire en H_1^2 . Nous n'avons pas étudié la variation de largeur des raies $(\Delta m = 2)^2$. Nous avons en effet remarqué que pour les raies d'ordre supérieur à 3, on commet d'énormes erreurs

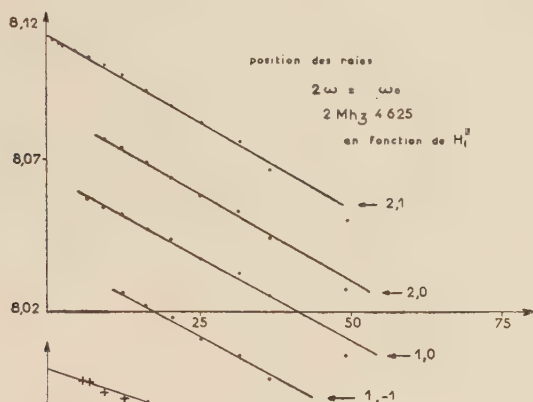


Fig. 21.

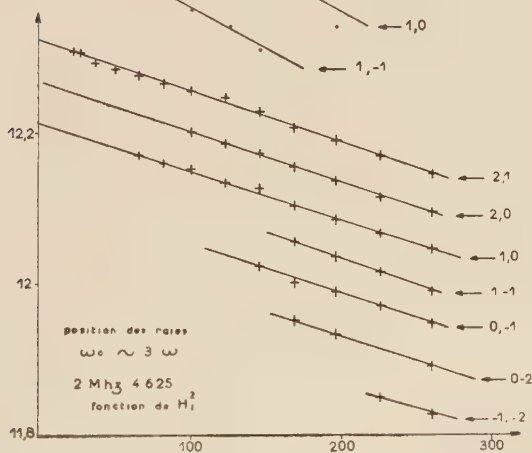
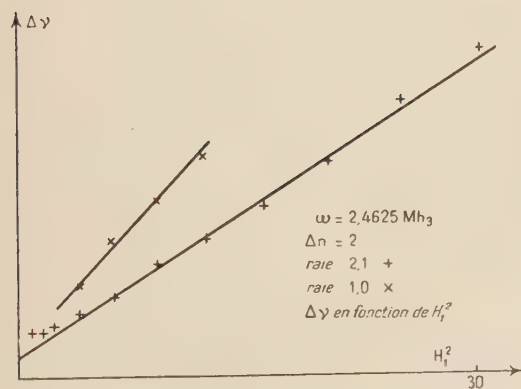


Fig. 22.



expérimentales sur les déterminations de largeur : les déplacements sont très importants et il suffit alors que le niveau de radiofréquence varie très légèrement pendant la mesure pour que la raie subisse un déplacement plus grand que sa largeur.

b) Groupe des résonances $\omega \sim 3\omega$. — A 2,4625 MHz, nous avons étudié la variation de largeur de la raie $(2 \rightarrow 1)^3$ en fonction de H_1^3 ; les points se placent médiocrement sur une droite. On obtient une largeur limite de $2(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 2,4$ kHz, cette valeur se place bien sur la courbe des largeurs limites en fonction de ω_0 pour $\omega_0 = 3\omega = 7,4$ MHz (voir fig. 21). Nous avons tracé les mêmes courbes pour les raies $(2 \rightarrow 1)^3$ et

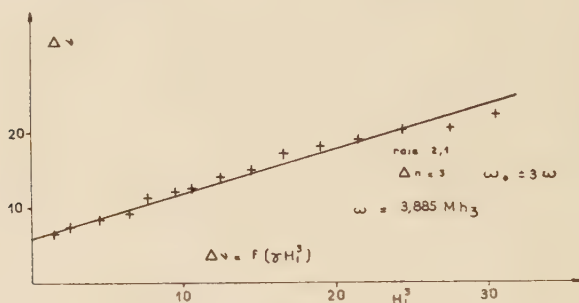


Fig. 23.

$(1 \rightarrow 0, F=2)^3$ à 3,885 MHz (fig. 23) ; elles conduisent à une largeur limite de 3,4 kHz qui se place également sur la courbe $\Gamma(\omega_0)$.

Si nous supposons que $K_\pi \ll K$, nous savons que la largeur des raies $\Delta n = 3\Delta m$ ne dépend que de K et de δ_{ab} . Nous pouvons mesurer K à partir de la position des raies ; nous pouvons donc comparer

$$4K_{ab} \text{ et } 4K_{ab} \sqrt{1 + \frac{\delta_{ab}}{2}}.$$

Les résultats sont les suivants :

	$4K_{ab}$	$\Delta\nu_{ab}^* = 4K_{ab} \sqrt{1 + \frac{\delta_{ab}}{2}}$	δ_{ab}
2,4625 MHz raie $(2 \rightarrow 1)^3$	33	42	1,2
3,885 MHz raie $(2 \rightarrow 1)^3$	18	24	1,6
$(1 \rightarrow 0 (F=2))^3$	22	25	0,6

Nous pensons que les δ_{ab} ainsi obtenus sont d'un ordre de grandeur correct.

Nous avons calculé δ_{ab} dans le cas très particulier d'un atome de sodium sans spin nucléaire soumis au pompage optique de la raie D_1 .

On obtient $\delta = 1,2$ en prenant $\rho\mu = 0,6$, ce qui est raisonnable à la pression d'argon à laquelle nous opérons et à l'intensité lumineuse excitatrice utilisée (29).

Amplitudes raie $(\Delta m)^2 \omega_0 = 2\omega$. — Nous avons vérifié pour la résonance $(2 \rightarrow 1)^2$ la loi $\frac{H^6}{I} = aH^6 + b$ aux deux fréquences utilisées. Nous avons également vérifié que la loi $\frac{H^8}{I} = aH^8 + b$ était en assez bon accord avec l'expérience pour les résonances $(2 \rightarrow 0)^2 \omega_0 = 2\omega$. Dans le

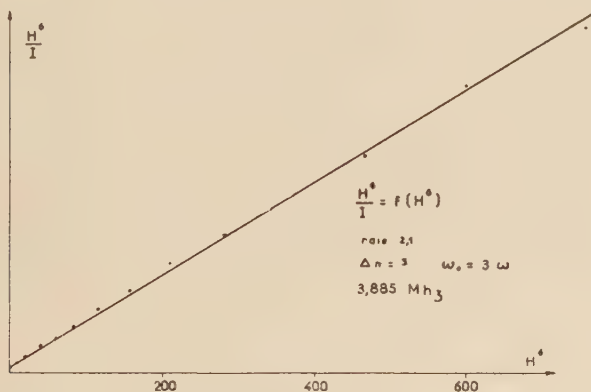


Fig. 24.

cas des résonances $(\Delta m)^3$ nous n'avons étudié que la résonance $(\Delta m = 1,^3$, la loi $\frac{H^6}{I} = aH^6 + b$ se vérifie bien (fig. 24). Nous avons également vérifié sur une résonance $(2 \rightarrow 1)^3$ que la forme de la raie de résonance était assez bien représentée par une courbe de Lorentz.

4° Expériences utilisant simultanément deux fréquences ω et ω' . — Nous avons également repris les expériences de Margerie. Nous avons utilisé les fréquences de 941 kHz et 1,206 MHz (raies du type Majorana). Nos vérifications quantitatives portent uniquement sur la position des résonances (28).

Soit ω et ω' les deux fréquences utilisées.

Nous poserons :

$$K = K_+ = K_+(\omega),$$

$$K' = K'_+ = K'_-(\omega').$$

La position des résonances 2ω et 3ω en l'absence des photons ω' est donnée par les formules :

$$\omega_0 + t = 2\omega - \frac{8}{3} \frac{K^2}{\omega}$$

$$\omega_0 + t = 3\omega - \frac{3}{2} \frac{K^2}{\omega}$$

t étant la composante horizontale du champ terrestre.

On peut tracer la courbe donnant la position des résonances en

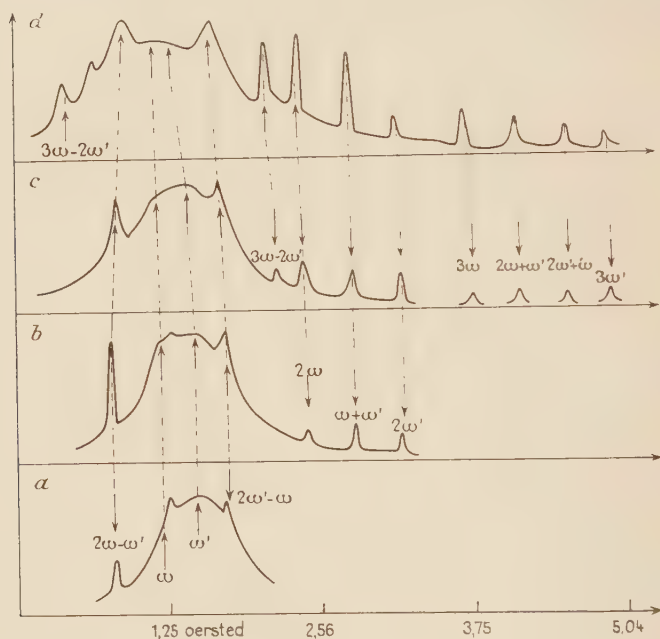


Fig. 25.

fonction de K et déterminer par extrapolation sa position Ω_0 pour $K=0$. On en déduit, pour une valeur arbitraire de K , la grandeur $\Omega_0 - \omega_0 = \frac{8}{3} \frac{K^2}{\omega}$ d'où K et t (et K' par une méthode analogue). Ensuite on trace un réseau de résonances lorsque les fréquences ω et ω' sont simultanément présentes, puis des valeurs fixes de K et K' . La position théorique des résonances résulte de la formule :

$$(2 \ 125) \quad \omega_0 + t = p\omega + q\omega' - \frac{2K^2}{\omega_0 - \omega} - \frac{2K^2}{\omega_0 + \omega} - \frac{2K'^2}{\omega_0 - \omega'} - \frac{2K'^2}{\omega_0 + \omega'}$$

dans laquelle t , ω , ω' , K et K' sont connus.

Cette formule n'est valable que si $K, K' \ll (\omega - \omega')$. L'accord est, en général, excellent, même pour des K et K' voisins de $\omega - \omega'$. La figure 25 montre les spectres observés. Les flèches donnent la position théorique des résonances. K' est constant pour toutes les courbes et on fait varier K . K augmente depuis le spectre du bas jusqu'au spectre supérieur.

On a observé des résonances allant jusqu'à l'ordre 5.

Remarque 1. — On sait que l'intensité de la résonance $p\omega + q\omega'$ varie comme $H_1^{2|p|} H_1^{2|q|}$; on peut constater qualitativement cette loi sur la figure 25. Par exemple, considérons les quatre raies $3\omega, 2\omega + \omega', \omega + 2\omega', 3\omega'$; laissons K' fixe et baissions K . La raie 3ω disparaît la première, puis $2\omega + \omega', 2\omega' + \omega$.

Remarque 2. — Notons que les résonances $p\omega - (p \pm 1)\omega'$ sont généralement plus intenses que les autres résonances du même ordre. Ceci est vérifié par exemple pour $2\omega - \omega'$ et $2\omega' - \omega$ qui sont beaucoup plus intenses que $2\omega + \omega'$ et $2\omega' + \omega$ (fig. 25). Ceci est également vrai pour $3\omega' - 2\omega$ et $3\omega - 2\omega'$ qui sont beaucoup plus intenses que les autres raies à cinq photons. Ceci provient du fait que dans K_{ab} on peut trouver pour ces résonances un terme :

$$\frac{K^p K'^{p+1}}{(\omega - \omega', 2)^p}.$$

C'est la faiblesse de $\omega - \omega'$ au dénominateur qui rend ces résonances intenses.

50 *Conclusion.* — Il est possible d'expliquer à peu près complètement les spectres obtenus dans tous les cas. Les désaccords observés entre la théorie et l'expérience apparaissent uniquement quand on cherche à calculer les largeurs à partir des déplacements observés. Les désaccords atteignent alors 20 p. 100. Une explication est proposée, faisant intervenir le facteur δ_{ab} . Par contre, les déplacements sont cohérents entre eux et les largeurs entre elles. A l'heure actuelle, aucune mesure basée sur une méthode distincte n'est proposée pour déterminer séparément le paramètre δ_{ab} , c'est une situation peu satisfaisante, mais à nos yeux, l'ensemble des vérifications déjà obtenues laisse peu de doute sur le fait que l'interprétation proposée est correcte.

L'ensemble constitue une vérification remarquable de la théorie des perturbations d'ordre supérieur.

Notons enfin le fait le plus important résultant de cette étude : la faible largeur limite des raies observées dans la vapeur en présence d'un gaz étranger. En l'absence d'inhomogénéités statiques Γ_2 , on peut espérer des largeurs intrinsèques inférieures à 200 hertz.

CHAPITRE VI

En conclusion, nous pouvons dire que les résultats suivants ont été obtenus :

1) Une théorie assez complète de l'action d'une perturbation oscillante sur les sous-niveaux de l'état fondamental d'un système atomique. Cette théorie nous permet de calculer les probabilités de transition entre deux sous-niveaux, même s'il n'existe pas d'éléments de matrice couplant directement ces deux niveaux. Cette théorie met en évidence la possibilité de transitions dans le système atomique, faisant intervenir l'absorption simultanée de plusieurs photons de radiofréquence.

2) Un calcul permettant de relier la forme des raies de résonance observée sur une vapeur orientée aux formules de probabilités de transition déduites de la théorie.

3) Une vérification expérimentale assez détaillée des formules de probabilités de transition en employant une vapeur orientée. Cette vérification expérimentale constitue la première étude détaillée des transitions à plusieurs quanta.

4) Une mesure de largeur des raies nous permettant d'évaluer le temps de relaxation dû à l'absorption successive des photons par un même atome, dans les expériences utilisant de la vapeur orientée en présence d'un gaz étranger. Ce temps de relaxation donne des raies de résonance extrêmement fines, résultat en accord avec des mesures antérieures.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) W. ANDERSON. — *Phys. Rev.*, 1956, **104**, 850.
- (2) AUTLER et C. TOWNES. — *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 703.
- (3) J.-P. BARRAT. — Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1954.
- (4) J.-P. BARRAT, J. BROSSEL et A. KASTLER. — *C. R.*, 1954, **239**, 1196.
- (5) J.-P. BARRAT et J.-M. WINTER. — *J. Phys. et Rad.*, 1956, **17**, 833.
- (6) P. L. BENDER. — *Thèse Princeton*, 1956.
- (7) C. BESSET, J. HOROWITZ, A. MESSIAH et J. WINTER. — *J. Phys. et Rad.*, 1954, **15**, 251.
- (8) A. BLANDIN et J.-P. BARRAT. — *C. R.*, 1955, **241**, 865.
- (9) J.-E. BLAMONT et J.-M. WINTER. — *C. R.*, 1957, **244**, 332.
- (10) F. BITTER et J. BROSSEL. — *Phys. Rev.*, 1952, **86**, 308.
- (11) F. BLOCH et I. RABI. — *Rev. of Mod. Phys.*, 1945, **17**, 237.
- (12) F. BLOCH et A. SIEGERT. — *Phys. Rev.*, 1940, **57**, 522.
- (13) G. BREIT et I. RABI. — *Phys. Rev.*, 1931, **38**, 2082.
- (14) J. BROSSEL, B. CAGNAC et A. KASTLER. — *J. Phys. et Rad.*, 1954, **15**, 6.
- (15) J. BROSSEL, J. MARGERIE et J. WINTER. — *C. R.*, 1955, **241**, 556.

- (16) J. BROSSEL, A. KASTLER et J. WINTER. — *J. Phys. et Rad.*, 1952, **13**, 668.
- (17) J. BROSSEL, J. MARGERIE et A. KASTLER. — *C. R.*, 1955, **241**, 865.
- (18) J. BROSSEL. — *Thèse Paris*, 1952; *Annales de Phys.*, 1952, **7**, 622.
- (19) B. CAGNAC. — Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1953.
- (20) C. COHEN-TANNOUDJI, J. BROSSEL et A. KASTLER. — *C. R.*, 1957, **244**, 1027.
- (21) C. COHEN-TANNOUDJI. — Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1956.
- (22) H. DEHMELT. — *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1487.
- (23) L. GRABNER et V. HUGUES. — *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 562.
- (24) HACK. — *Phys. Rev.*, 1956, **104**, 84.
- (25) HAMILTON, CHRISTENSEN, LEMONICK, PIPKIN, REYNOLDS et STROKE. — *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 1389.
- (26) F. HARTMANN. — Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1957.
- (27) W. B. HAWKINS. — *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 478.
- (28) HEITLER. — *Quantum theory of radiation*. Oxford, édition III.
- (29) V. HUGUES et L. GRABNER. — *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 829.
- (30) V. HUGUES et L. GRABNER. — *Phys. Rev.*, 1950, **76**, 1675.
- (31) A. KASTLER. — *J. Phys. et Rad.*, 1950, **11**, 255; *Physica*, 1951, **17**, 191.
- (32) P. KUSCH. — *Phys. Rev.*, 1954, **93**, 1022.
- (33) P. KUSCH. — *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 627.
- (34) E. MAJORANA. — *Nuovo Cimento*, 1932, **9**, 43.
- (35) J. MARGERIE et J. BROSSEL. — *C. R.*, 1955, **241**, 373.
- (36) J. MARGERIE. — Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1955.
- (37) S. MEIBOOM et J. I. KAPLAN. — *Phys. Rev.*, 1957, **104**, 499.
- (38) I. I. RABI. — *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 652.
- (39) I. RABI, N. F. RAMSEY et J. SCHWINGER. — *Rev. of Mod. Phys.*, 1954, **26**, 168.
- (40) N. F. RAMSEY. — *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1191.
- (41) H. SALWEN. — *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 1274.
- (42) L. SHIFF. — *Quantum mechanics*. McGraw-Hill, 1949, 210.
- (43) VAN VLECK. — *Phys. Rev.*, 1929, **33**, 467.
- (44) J. WINTER. — *C. R.*, 1955, **241**, 600.
- (45) J. WINTER. — *C. R.*, 1955, **241**, 375.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Les différents types de « Maser ».

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 14 mars 1958.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.

